Un curso rápido de cálculo estocástico para aplicaciones a modelos económicos. (Segunda parte)

Javier Arbeláez L.
Ulises Cárcamo C.[1]

RESUMEN

El curso continúa. Acá presentamos la fórmula de Ito extendida a n dimensiones y el concepto de Ecuación Diferencial Estocástica, en forma Matricial-vectorial. Se resuelve el caso lineal como caso especial y se aplica a la solución del modelo de Solow. Se añade un apéndice sobre la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales con el fin de ayudar a entender la última parte.

PALABRAS CLAVE

Ecuaciones diferenciales determinísticas, fórmula de Ito, modelo de Solow, modelos de dinámica económica.

Introducción

Así, como las ecuaciones diferenciales, que de ahora en adelante podemos llamar ecuaciones diferenciales determinísticas (EDD), juegan un papel importante en la descripción de modelos de dinámica económica en condiciones determinísticas, las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) juegan un papel importantísimo cuando se trata de tener en cuenta influencias aleatorias en los fenómenos dinámicos.

La fórmula de Ito, caso general

La fórmula que presentamos en al primera parte[1] se puede generalizar fácilmente, como sigue:

Sea el proceso vectorial $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, donde la componente i-ésima, x_i, tiene un diferencial estocástico de la forma

$$dx_i(t) = \mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)dW_j(t) \quad (1)$$

para i= 1, 2, . . ,n, y $W_1, W_2, \ldots, W_n$ son procesos de Wiener independientes.

Consideremos la clase M(n, d) de todas las matrices con **m** filas y **d** columnas,

el vector de tendencia (drift) m, dado por $m(t) = [m_1(t), m_2(t), m_n(t)]^T$, el proceso de Wiener d-dimensional W, dado por $[w_1(t), w_2(t), \ldots, w_d(t)]^T$ y la matriz de difusión n x d –dimensional dada por

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nd} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

entonces la dinámica de X se puede escribir como $dX(t) = m(t)\,dt + s(t)\,dW(t)$. (3)

Además, definamos el proceso Z, mediante Z(t) = f(t, X(t)), donde f es una funciòn $f: R+ \times R^n$ ® R, que es continua y tiene derivadas parciales continuas hasta de orden dos. Entonces Z tiene un diferencial estocástico dado por

$$df(t,X(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial xi}dXi + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}dX_i.dX_j \quad (4)$$

con la tabla formal de multiplicación:

$$\begin{cases} (dt)^2 = 0 \\ dt.dW = 0 \\ (dWi)^2 = dt, \text{para} \quad i = 1, 2, \cdots, d \\ dW_j.dW_j = 0, \quad i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

Ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE), el caso general

Mostramos ahora, con mayor detalle, el concepto de ecuación diferencial estocástica, mencionado en la primera parte:

Consideremos los siguientes elementos dados:

1. Un proceso vectorial de Wiener, vector columna, con d elementos:

$[w_1(t), w_2(t), \ldots, w_d(t)]^T$.

2. Una función vectorial, vector columna,

$\mu: R_+ \times R^n \rightarrow R^n$.

3. Una función matricial $\sigma: R_+ \times R^n \rightarrow M(n,d)$.

4. Un vector X_0 de R^n.

Estos tienen las formas respectivas:

$\mu(t, X(t)) = [\mu_1(t, X(t)), \mu_2(t, X(t)), \mu_n(t, x(t))]^T$., donde las $\mu_i(t,X(t))$ son funciones escalares de n+1 variables, para i= 1, 2, . . ., n.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t, X(t)\ ) & \cdots & \sigma_{1d}(t, X(t)\ ) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1}(t, X(t)\ ) & \cdots & \sigma_{nd}(t, X(t)\ ) \end{bmatrix} \text{ y } X_0 = \begin{bmatrix} X_0^1 \\ \vdots \\ X_0^n \end{bmatrix} \quad (6)$$

Queremos indagar sobre la existencia de procesos estocásticos que sean soluciones de la ecuación diferencial estocástica

$dXt = \mu(t, X(t))\, dt + \sigma(t, X(t))\, dw(t)$, con la condición $X(0) = X_0$. (7)

ó en forma integral equivalente:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu(s, X(s))\ \ ds + \int_0^t \sigma(s, Xs)dW(s)$$

para $t \geq 0$ (8).

Una respuesta la da el siguiente teorema:

Teorema de existencia

Suponga que existe una constante K tal que las siguientes condiciones se satisfacen para todo, x, y y t:

$$\|\mu(t,x) - \mu(t,y)\| \leq K\|x-y\| \quad (9)$$

$$\|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K\|x-y\| \quad (10)$$

$$\|\mu(t,x)\| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1+\|x\|) \quad (11^3)$$

Entonces existe una única solución X(t) al problema (7), con las siguientes propiedades:

1. X es un proceso F_t^W –adaptado
2. X tiene trayectorias continuas
3. X es un proceso de Markov
4. Existe una constante C tal que

$$E\left[\|X(t)\|^2\right] \leq Ce^{Ct}(1+\|X_0\|^2)$$

Como caso particular muy interesante están las ecuaciones diferenciales estocásticas lineales, a las que dedicaremos el resto de este artículo.

Como introducción veremos la correspondiente ecuación lineal escalar y sus casos particulares. A continuación veremos la solución del caso homogéneo y como una de sus aplicaciones el Movimiento Browniano geométrico.

Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales: el caso escalar

Consideremos d fuentes de aleatoriedad, representadas por d procesos de Wiener independientes, $W_1, W_2, \ldots, W_d$.

Una EDE lineal tiene la forma

$$dx(t) = [A(t)\,x(t) + a(t)]\ dt + \sum_{k=1}^{d}\ [B_k(t)\,x(t) + b_k(t)]\,dw_k(t) \quad (12)$$

Donde A, a, B_k y B_k son funciones de t, para k = 1, 2, . . ., d, y $t \in [t_0, T]$.

Usualmente la ecuación (12) se acompaña por una condición inicial del tipo $x(t_0) = x_0$, completando un **problema de valor inicial**.

De acuerdo con ciertas características de las funciones coeficientes podemos hacer una primera clasificación de estas ecuaciones.

Casos especiales

1. Si gra 9, la E.D.E lineal se llama **homogénea** y toma la forma

$$dx(t) = A(t)\,x(t)\,dt + \sum_{k=1}^{d}\ B_k(t)\,x(t)dw_k(t) \quad (13)$$

2. Si $B_1(t) = B_2(t) = \ldots = B_d(t) = 0$, la E.D.E lineal se llama **lineal en sentido estricto** y toma la forma

$$dx(t) = [A(t)\,x(t) + a(t)]\ dt + \sum_{k=1}^{d}\ b_k(t)]\,dw_k(t) \quad (14)$$

3. Si los coeficientes A, a, B_k, b_k, son todos independientes del tiempo, la E.D.E lineal se llama **autónoma**. En este caso escribimos simplemente

$$dx(t) = [A\,x(t) + a]\ dt + \sum_{k=1}^{d}\ [B_k(t) + b_k]\,dw_k(t) \quad (15)$$

TEOREMA:

La solución de la E.D.E lineal

$$dx(t) = A(t)\,x(t)\,dt + \sum_{k=1}^{d} B_k(t)x(t)dw_k(t)$$

con valor $x(t_0) = x_0$ con $t \in [t_0, T]$

està dada por

$$X(t) = X_0 \exp\left[\int_{t_0}^{t}\left(A(s) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} B_k^2(s)\right)ds + \sum_{k=1}^{d}\int_{t_0}^{t} B_k(s).dW_k(s)\right] \quad (14)$$

El movimiento browniano geométrico (de nuevo)

Como una aplicación de este teorema, reconsideremos este proceso estocástico, base para numerosas aplicaciones en finanzas y economía. Está definido por el problema de valor inicial $ds = \mu.s.dt + \sigma.s.dW$, $s(0) = s_0$.

Aplicando el teorema anterior, y la definición del proceso de Wiener, vemos que la solución está dada por $S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$ (16), que es la que teníamos en la primera parte.

Modelo de crecimiento de Tobin (1965)

James Tobin fue uno de los primeros economistas en introducir dinero en un modelo económico de crecimiento.

Las ecuaciones del modelo (determinista) son:

$Y = F(K, L)$ (17), Función de Inversión, donde F es una función homogénea de grado 1.

$\frac{dP}{dt} = qP$ (18) comportamiento de la inflación (q es una constante)

$I = \frac{dK}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right)$ (19) Función de inversión.

$S = s\left[Y + \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right)\right]$ $0 < s < 1$, (20) Función de ahorro.

$L(t) = L(0).\ e^{nt}$ $L(0) > 0$ (21) Crecimiento de la mano de obra.

$M(t) = M(0).\ e^{\theta t}$, $M(0) > 0$ (22), Crecimiento de la oferta de dinero.

En condiciones de equilibrio, el ahorro iguala a la inversión, luego

$$\frac{dK}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right) = s\left[Y + \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right)\right]$$

y de acá se deduce

$$\frac{dK}{dt} = s\left[Y + \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right)\right] - \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right) \quad (23).$$

A esta ecuación 13 se le conoce como **ecuación fundamental de Tobin**.

De (18), (21) y (22), respectivamente, se pueden deducir

$$\frac{dP}{dt} = qP \ (24),\quad \frac{dL}{dt} = nL \ (25), \text{ y } \quad \frac{dM}{dt} = \theta M \ (26)$$

Si, $k = \frac{K}{L}$ entonces $\frac{dk}{dt} = \frac{1}{L}\frac{dK}{dt} - nk$ (27),

además $\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right) = (\theta - q)\left(\frac{M}{q}\right)$ (28), Si hacemos $f(k)=\frac{1}{L}F(K,L)=F(K/L,1)$ (99) y $m=\frac{1}{L}\frac{M}{P}$ (30), el dinero real per cápita, entonces concluimos que $\frac{dk}{dt}=sf(k)-(1-s)\ \ (\theta-q)m-nk(31)$.

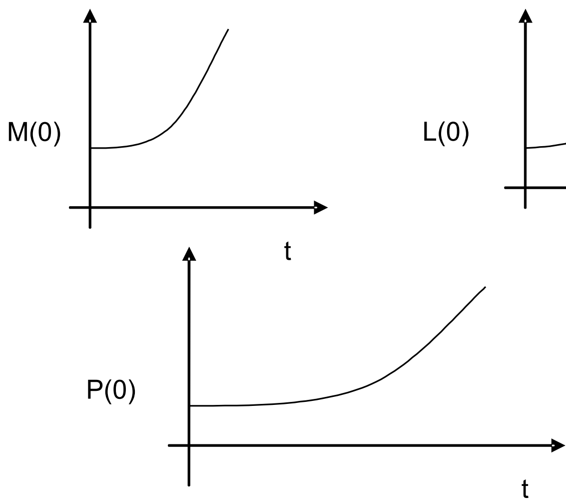


Figura 1. Supuestos sobre M, L y P en el modelo de Tobin

En el caso θ = q, y más particularmente, cuando ambos son iguales a cero, se obtiene el modelo de Solow, visto en la primera parte, como un caso particular.

Es decir, este modelo es un caso más general de aquel modelo.

Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales: el caso general

$$\begin{bmatrix} dx_1(t) \\ \vdots \\ dx_n(t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11}(t) & \cdots & A_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}(t) & \cdots & A_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{bmatrix} \right\} dt + \sum_{k=1}^{d} \left\{ \begin{pmatrix} Bk_{11}(t) & \cdots & B_{k1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1n}(t) & \cdots & B_{knn}(t) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \right\} dWk(t)$$

La solución a la ecuación homogénea asociada

Consideremos la ecuación diferencial lineal estocástica lineal asociada a (32)

$$\begin{bmatrix} dx_1(t) \\ M \\ dx_n(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & L & A_{1n}(t) \\ M & M & M \\ A_{1n}(t) & L & A_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ M \\ x_n(t) \end{bmatrix} dt + \sum_{k=1}^{d} \begin{pmatrix} B_{k11}(t) & L & B_{k1n}(t) \\ M & M & M \\ B_{k1n}(t) & L & B_{knn}(t) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ M \\ x_n(t) \end{bmatrix} dW_k(t)$$

(33) ò $dX(t)=A(t).X(t).dt+\sum_{k=1}^{d}B_k(t).X(t)dW_k(t)$

(34) con las mismas condiciones que en (7). Sea $e_j=(\overbrace{0,\cdots,0,1}^{j},0,\cdots 0)^T$, el i-ésimo vector de la base canónica de R^n y sea $\Phi_j(t)=(\Phi_{1j}(t),\cdots,\Phi_{nj}(t))^T$ la solución de (33) con el valor inicial $x(t_0)=e_j$.

Definamos la matriz n x n F(t) mediante

$$\Phi(t)=(\Phi_{ij}(t))=(\Phi_1(t),\cdots,\Phi_n(t)) \quad (35).$$

Llamamos a $\Phi(t)$ la ***matriz fundamental*** de la ecuación (32) or (33).

Fácilmente podemos notar que $\Phi(t_0)=I_n$, la matriz identidad n x n, y que

$$d\Phi(t)=A(t).\Phi(t).dt+\sum_{k=1}^{d}B_k(t).\Phi(t)dW_k(t) \quad (36).$$

Después de haber notado esto, el siguiente teorema aparece como una consecuencia natural:

Teorema. Solución de la ecuación homogénea asociada.

Dado el valor inicial $X(t_0)=X_0$, la única solución de la ecuación (33) (ó (34)) es $X(t)=\Phi(t).X_0$.[4]

Ejemplo

Consideremos la ecuación homogénea

$$\begin{bmatrix} dx_1(t) \\ dx_2(t) \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}dt+\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix}$$

Esta es equivalente al par de ecuaciones escalares

$$dX_1(t)=\alpha_1 X_1(t)dt+\sigma_1 X_1(t).dW_1(t)$$

$$dX_2(t)=\alpha_2 X_2(t)dt+\sigma_2 X_2(t).dW_2(t)$$

(Invitamos a lector atento a confirmar esto)

Si tenemos las condiciones iniciales $x_1(t_0)=X_1^0$, $x_2(t_0)=X_2^0$.

Entonces tenemos las soluciones y

$$X_1(t)=X_1^0 \cdot e^{(\alpha_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2)(t-t_0)+\sigma[W_1(t)-W_1(t_0)]}$$

$$X_1(t)=X_2^0 \cdot e^{(\alpha_2-\frac{1}{2}\sigma_2^2)(t-t_0)+\sigma[W_2(t)-W_2(t_0)]}$$

entonces podemos corroborar fácilmente que $\Phi(t)$ está dada por

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^{(\alpha_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2)(t-t_0)+\sigma[W_1(t)-W_1(t_0)]} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha_2-\frac{1}{2}\sigma_2^2)(t-t_0)+\sigma[W_2(t)-W_2(t_0)]} \end{pmatrix}$$

Si hacemos $X_0=\begin{bmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \end{bmatrix}$, entonces la solución al sistema es $X(t)=\Phi(t)X_0$.

Es importante notar que si el sistema es lineal en el sentido estricto y A no depende de t (es constante), entonces $\Phi(t)=e^{A(t-t_0)}$.

Una explicación y una justificación de esta última fórmula se da en el apéndice. Este Apéndice recoge material que se estudia en los cursos de ecuaciones diferenciales (determinìsticas), en el tema de sistemas lineales de ecuaciones. Como estos temas generalmente no se incluyen en los cursos de matemáticas para economía y afines, decidimos presentarlos acá.

La solución de la homogénea es fundamental, pero solo una parte. Enunciamos la solución general a continuación:

Teorema. Solución de la ecuación en el caso general

La solución única a la ecuación (33) puede expresarse en la forma

$$x(t)=\Phi(t)\left(x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\left[a(s)-\sum_{k=1}^{d}B_k(s)\ .b_k(s)\right]ds+\sum_{k=1}^{d}\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)b_k(s)dw_k(s)\right)$$

(37), donde, $\Phi(t)$ es la matriz fundamental de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente.

Ya con esta solución en la mano, podemos enfrentar uno a uno los casos particulares vistos anteriormente y darles solución.

Como primera medida enunciamos el siguiente lema:

Lema. Forma explícita de la solución fundamental. Caso escalar.

La matriz fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada a la ecuación (12) está dada por

$$\Phi(t)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}\left(A(s)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}B_k^2(s)\right)ds+\sum_{k=1}^{d}\int_{t_0}^{t}B_k(s)\ .dW_k(s)\right] \quad (38)$$

Ahora podemos dar la solución general de la ecuación escalar.

Corolario. Solución general de la ecuación lineal escalar.

La solución general está dada por

$$x(t)=\Phi(t)\left(x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\left[a(s)-\sum_{k=1}^{d}B_k(s).b_k(s)\right]ds+\sum_{k=1}^{d}\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)b_k(s)dw_k(s)\right) \quad (39)$$

La diferencia entre (37) y (39) es que la primera es matricial y de acuerdo con la teoría y los ejemplos que se muestran en el apéndice.

Aplicación: Solución general de la EDE del modelo de Solow

Recordamos de la primera parte que la EDE del modelo de Solow se puede escribir como dk(t) = $dk(t) = [S\ f(k)- k\ (n - {}^2)]dt - \sigma k(t)dz$ (40) que se puede reescribir como $dk(t) = [-k(n-\sigma^2) +S\ f(k)]dt - \sigma k(t)dw(t)$ (41).

Se observa que, en general (41), no es lineal, dado que el término S.f(k) depende de k.

A pesar de esto, en algunos casos, la ecuación podría ser lineal, por ejemplo, si K = g(t).L, donde g es una función del tiempo. Si este es el caso, escribiremos f(t), en vez de f(k) así que $dk(t) =[-k(n-\sigma^2) +S\ f(t)]dt - \sigma k(t)dw(t)$

y además, supongamos $k(0) = k_0$ (42)

La ecuación homogénea asociada es $dk(t) = [-k(n-\sigma^2)]dt - \sigma k(t)dw(t)$ (43) y su solución está dada por $\Phi(t) = k_0\ Exp[-(n-½^2)(t-t_0) +\sigma(W(t)-W(t_0)]$ que es un movimiento Browniano geométrico.

La solución general será

$$k(t)=\Phi(t)\left[k_0+\int_{t_0}^{t}e^{(n-\frac{1}{2}\sigma^2)(s-t_0)+\sigma(w(s)-W(t_0))}S.f(s)ds\right] \quad (43)$$

Nota: En esta expresión (43), la S mayúscula es la propensión marginal al ahorro, mientras que la s minúscula es la variable de integración.

En el caso general se necesitaran métodos numéricos para resolverlo.

Corolario. Solución de las ecuaciones lineales en el sentido estricto. Caso general.

Consideremos la ecuación diferencial estocástica lineal en el sentido estricto en d-dimensiones

$$dx(t) = (A(t).x(t) + a(t))dt + \sum_{k=1}^{d} b_k(t).dw_k(t) \quad ,$$

con $t \in [t_0, t]$ y $x(t_0) = x_0$ (44)

La correspondiente ecuación homogénea asociada es la ecuación diferencial determinística,

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) \quad (45)$$

Si $\Phi(t)$ es la matriz fundamentadle de la ecuación anterior, entonces la solución de (44)

$$x(t) = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)a(s)ds + \sum_{k=1}^{d} \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b_k(s)dw_k(s) \right)$$

tiene la forma (46).

Como caso particular, cuando A(t) es independiente del tiempo, es decir A(t) = A, una matriz constante d x d, entonces $\Phi(t)$ tiene la forma simple $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$ y su inversa es $\Phi^{-1}(t) = e^{-A(t-t_0)}$ (ver apéndice).

En este caso la solución general es

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + e^{-A(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} a(s)ds + \sum_{k=1}^{d} \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} b_k(s)dw_k(s) \quad (47)$$

Corolario. Ecuaciones lineales autónomas

Consideremos ahora la ecuación d-dimensional lineal autónoma

$$dX(t) = (A\,x(t) + a)\,dt + \sum_{k=}^{d} \left(B_k\,x(t) + b_k\right) dW_k(t) \quad (48)$$

con $t \in [t_0, t]$ y $x(t_0) = x_0$. la ecuación homogénea correspondiente es

$$dX(t) = A\,x(t)dt + \sum_{k=}^{d} B_k\,x(t).dW_k(t) \quad (49)$$

En general, $\Phi(t)$ no tiene una forma explícita. A pesar de esto, si las matrices A y Bk conmutan, es decir, si A. Bk = Bk.A y Gi. Gj = Gj.Gi para todo k y j entre 1 y d, entonces la matriz fundamental de (49) tiene la forma explícita

$$\Phi(t) = Exp\left[\left(A - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} B_k^2 \right)(t - t_0) + \sum_{k=1}^{d} B_k (W_k(t) - W_k(t_0))\right] \quad (50).$$

La solución general de (48) es :

$$x(t) = \Phi(t)\left(x_0 + \left(\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)a(s)ds \right)\left(a - \sum_{k=1}^{d} B_k(s).b_k(s) \right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)dW_k(s)ds \right) b_k \right) \quad (49).$$

Normalmente, aunque se tenga una solución explícita, calcular el valor esperado y la varianza de tales soluciones es un trabajo engorroso. Afortunadamente existe un teorema que permite el cálculo de los valores esperados, y a veces de la varianza, sin demasiado esfuerzo.

Teorema. Valor esperado y varianza de la solución

Para la solución de (32) se tiene que:

(a) m(t) = E(x(t)) es la única solución de la ecuación $\frac{dm(t)}{dt} = A(t)m(t) + a(t)$ (50) en

$[t_0, T]$ con el valor inicial $m(t_0) = E(x_0)$.

(b)$P(t) = E(x(t).x^T(t))$ es la única no-negativa definida y simétrica solución de la ecuación gra

$\frac{dP(t)}{dt} = A_1 + \sum_{k=1}^{d} A_k$ (51) donde

$$A_1 = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + a(t).m^T(t) + m(t).a^T(t)$$

(52) y

$$A_k = B_k(t)P(t)\,B_k^T(t) + B_k(t)m,(t)\,b_k^T(t) + b_k(t)m^T(t)\,B_k^T(t) + b_k(t)\,b_k^T(t)$$

(53) en $[t_0, T]$ con el valor inicial $P(t_0) = E(x_0.X_o^T)$. (54)

El proceso con reversión a la media de Ornstein-Uhlenbeck

Uno de los modelos para la volatilidad de precios de algunas acciones, retornos de índices bursátiles y algunas commodities es el proceso de reversión a la media de Ornstein-Uhlenbeck.

Éste está definido por el siguiente problema de valor inicial: $dx(t) = -\alpha\,(x(t) -)\,dt + \sigma dW(t)$, con $t \geq 0$ y valor inicial $x(0) = x_0$

Identificando $A(t)$ con $-\alpha$, $a(t)$ con α, $B(t)$ con 0 y $b(t)$ con σ vemos que la solución fundamental está dada por $\Phi(t) = e^{-\alpha t}$ (55) y la solución general por $x(t) = e^{-\alpha t}\left(x_0 + \alpha\mu\int_0^t e^{-\alpha s}ds + \sigma\int_0^t e^{-\alpha s}dw(s)\right)$

(56)

$$x(t) = e^{-\alpha t}x_0 + \mu(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma\int_0^t e^{-\alpha s}dw(s)$$

(57)

El valor esperado m(t), debe satisfacer la ecuación diferencial lineal

$\frac{dm}{dt} = -\alpha m + \alpha\mu$ con $m(0) = E(x_0)$.

Fácilmente comprobamos que la solución es $m(t) = \mu + (E(x_0) - \mu)\,e^{-\alpha t}$ (58)

Ahora, cuando $t \to \infty$, $m(t) \to \mu$.

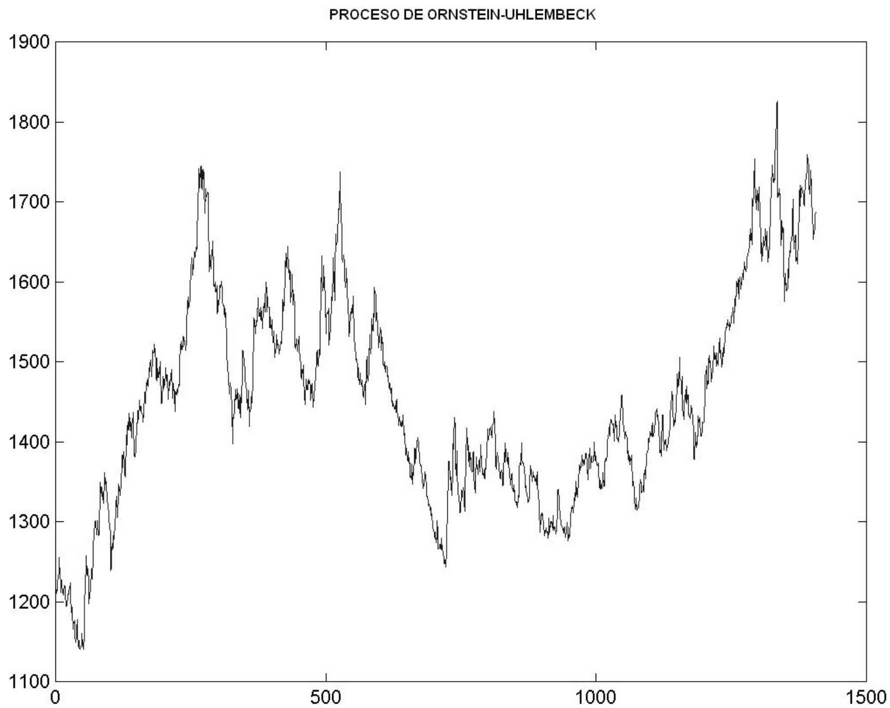
Esta μ es un "promedio de largo plazo" al que tiende la media del proceso en el largo plazo. Las realizaciones del proceso nunca se alejan demasiado de este promedio.

Este resultado también se puede probar aplicando valores esperados a la expresión (57)

Queda como ejercicio al lector atento demostrar que la varianza de x(t) está dada por Var(x(t)) = $e^{-2\alpha t}Var(x_0) + \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})$ (59) y que esta tiende a $\frac{\sigma^2}{2\alpha}$ cuando $t \to \infty$.

Un ejercicio a manera de examen de curso

Considere el modelo de Tobin. Si la única fuente de incertidumbre está dada por el crecimiento de la oferta de dinero está dada por $dM = \theta\,M\,dt + \mu\,M\,dW$, con $M(0) = M_0$, donde W es un proceso de Wiener. Aplique el lema de Ito y la teoría vista para encontrar una solución. Haga las suposiciones pertinentes.



Apéndice

Algunos resultados fundamen-tales de la teoría de las matrices

Similaridad

Una matriz A se dice que es **similar** o **semejante** a una matriz B (simbólicamente A∼B) si existe una matriz invertible P tal que A= $PBP^{-1.}$

En términos geométricos decimos que A y B representan la misma transformación lineal.

Una función f se dice que es **invariante bajo similaridad** si siempre que A y B sean semejantes, se cumpla que f(A) = f(B).

Como ejemplos de funciones matriciales que son invariantes bajo similaridad están la función determinante, la traza, el rango y el polinomio característico.

Un conjunto E de matrices se dice que es **invariante bajo similaridad**, si todas las matrices similares a cada una de las matrices en el conjunto E, están también en E.

Una propiedad se dice que es invariante bajo similaridad, si el conjunto de todas las matrices que tienen la propiedad, es invariante bajo similaridad.[5]

Example 1 (A very useful property)

Si $g(u) = \alpha_0 I + \alpha_1 U + \cdots + \alpha_n U^n$, donde los α_i ,son números reales,. Para para I= 0, . . .,n, y si A∼B entonces $g(A)=PG(B)P^{-1}$.

Para probar esto, veamos primero que para todo m:

1) Si m =0, la propiedad se cumple trivialmente

2) Supongamos que, entonces, $A^k = P.B_k.P^{-1}$, entonces, $A^{k+1} = A^k.A = (P.B^k.P^{-1})(PBP^{-1}) = PB^{k+1}P^{-1}$

Al aplicar el principio de inducción se asegura el umplimiento de la propiedad para todo m, entero no negativo.

Ahora,

$g(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_n A^n = \alpha_0 PP^{-1} + \alpha_1 PBP^{-1} + \cdots \alpha_n PB^n P^{-1}$

$= Pg(B)P^{-1}$.

A manera de ilustración, supongamos que A es una matriz diagonalizable 2x2 , entonces existe una matriz $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ tal que $A = PDP^{-1}$ y

$g(A)=P.g(D).P^{-1}$, pero g(D) es una matriz con $D_{11} = \alpha_0 + \alpha_1.\lambda + \cdots + \alpha_n.\lambda^n = g(\lambda)$, $D_{12} = D_{21} = 0$, y $D_{22} = \alpha_0 + \alpha_1.\mu + \cdots + \alpha_n.\mu^n = g(\mu)$, así que

$$g(A) = P\begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\mu) \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Este ejemplo se puede generalizar para una matriz diagonalizable de tamaño n[6].

Sucesiones de matrices

Supongamos que $M_1, M_2, \ldots$ es una sucesión infinita de matrices de tamaño $k \times l$. Denotemos mediante $M_{ij}^{(n)}$ al ij-ésimo elemento of Mn, decimos que $M=(M_{ij})$ es el límite de la sucesión dada, denotado $\lim_{n\to\infty} M_n = M$ si para cada i y cada j tenemos $\lim_{n\to\infty} M_{ij}^{(n)} = M_{ij}$ Por ejemplo, si $M_n = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{r}{n}\right)^n & \frac{1}{n} \\ \frac{2n+3}{3n-1} & 2 \end{pmatrix}$,

se tiene que $\lim_{n\to\infty} M_n = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}$

Series of Matrices

Si $A_1, A_2, \ldots$ es a sucesión de matrices, entonces, a la sucesión $A_1, A_1+A_2, A_1+A_2+A_3, \ldots$ se le llama la serie infinita generada por la sucesión, y se le denota por $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, si $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} A_k$ existe, se dice que la serie converge.

Dados los escalares $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ y la matriz cuadrada A, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A^k$ se llama una **serie de potencias en A**.

Condición suficiente para la convergencia de una serie de potencias

Sea ρ el radio de convergencia de la serie escalar , λ

$\sum \alpha_k t^k$entonces si $|\lambda| < \rho$ para cada valor propio λ de la matriz A, entonces la serie de potencias matricial $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k A^k$ converges, y si $|\lambda| > \rho$ para algún valor propio entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k A^k$ diverge.

Como el **radio espectral**, $|A|$, de la matriz A se define como $|A| = \max\{|\lambda| : \lambda \textit{ es un valor propio de } A\}$, la propiedad se puede volver a enunciar como: $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k A^k$ converge si $|A| < \rho$ y diverge si $|A| > \rho$.

Series de potencias como funciones de matrices

De manera análoga al caso escalar, si T es el conjunto de todas las matrices A, tales que $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k A^k$ converge, y si definimos f(A)= $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k A^k$, entonces f una función de valor matricial definida en T .

Extensión de funciones representadas como series de potencias

Si f(t) $= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k$, la serie f(A)= $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k A^k$ se llama la extensión matricial de la función escalar y normalmente se hace referencia a ella con el mismo nombre de la función escalar.

Ejemplos 2

1. La **matriz exponencial**: e^A = exp(A) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^k$=se define para todas las matrices cuadradas dado que la serie escalar asociada converge para todos los valores reales real.
2. La **matriz arco-tangente**: $\tan^{-1}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} A^{2k+1}$ se define para todas las A, tales que porque la serie escalar tiene radio de convergencia 1.
3. La **matriz coseno**: Cos(A) $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}$ se define para toda A.
4. La **matriz seno**: Sen(A) = $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}$ se define para toda A.

Ejemplo 3

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, esta es una matriz cuyo exponencial se puede sumar exactamente. Primero, notemos que A^2= -I, A^3= -A, A^4= I, A^5= A, y el ciclo se repite así que

$$e^{At} = I + At - \frac{1}{2!} It^2 - \frac{1}{3!} At^3 + \frac{1}{4!} It^4 + \frac{1}{5!} At^5 + \cdots$$

$$\left[1 - \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{4!} t^4 + \cdots\right] I + (t - \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{5!} t^5 + \cdots) A = \cos t\, I + \sin t\, A =$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cost} & \text{sint} \\ -\text{sint} & \text{cost} \end{pmatrix}$$

Algunos resultados relacionados con la matriz exponencial

1. det[exp(A)] = exp[traza(A)] para toda A.
2. exp(A) es no singular para toda A
3. $e^{\alpha} B = e^{\alpha I} B$ para todo escalar y toda matriz B
4. e^I=e.I
5. If D=diag($\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$) entonces $e^D = diag(e^{\lambda 1}, e^{\lambda 2}, \cdots, e^{\lambda n})$
6. If A is diagonalizable, A = PDP^{-1}, entonces, e^A= $P.e^D.P^{-1}$
7. $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$
8. Si AB = BA entonces, $e^{At+Bt} = e^{At}.e^{Bt}$; en particular $e^{A(t-s)} = e^{At}.e^{-As}$ para todo t y todo s.

Ejemplo 4

Sea A= $\begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, A es diagonalizable, A =

P.D.P^{1} = $\begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}$, así que su exponen-cial es e^{A}

$$= \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Consideremos el sistema homogéneo $\frac{dX}{dt} = AX(t)$ (1), donde A es una matriz constante n x n. tenemos los siguientes resultados:

1. La dimensión del espacio V de todas las soluciones del sistema (1) es n.

2.Sean X_1, X_2, . . .,X_k k solutions de (1). Seleccionemos un valor t_0, conveniente, entonces X_1, X_2, . . .,X_k son soluciones linealmente independientes si, y solo sí, $X(t_0)$, $X_2(t_0)$,. . .,$X_k(t_0)$ son vectores linealmente independientes en R^n.

3. X(t) = $e^{\lambda t}V$, donde V es un vector constante, es una solución de (1) si, y sólo sí, V es un vector propio de A, correspondiente al valor propio λ .

4. Si $\lambda=\alpha+i\beta$ es un valor propio complejo de A con vector propio V = $V_1 + iV_2$,, entonces, X(t) = $e^{\lambda t}V$ es una solución compleja de (1).

5.Si x(t) = Y(t) + i z(t) es una solución compleja de (1) entonces, ambos y(t) y z(t) son soluciones reales linealmente independientes de (1).

6. Para encontrar n soluciones linealmente independientes de (1) se puede usar el siguiente algoritmo:

A. Encontrar todos los valores propios y vectores propios de A.

B. Si A tiene n valores propios linealmente independientes, entonces (1) tiene n soluciones linealmente independientes de la forma $e^{\lambda t}V$.

C. Si A tiene únicamente k < n vectores propios linealmente independientes, entonces, para hallar soluciones adicionales, escogemos un valor propio λ y encontramos todos los vectores V para los cuales $(A - \lambda I)^2V= 0$ pero $(A- \lambda I)\, V \neq 0$ Para cada uno de tales vectores V, $e^{At}V = e^{\lambda t}\left[v + t(A-\lambda I)V + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda I)^2 V \right]$ es una solución adicional de (1)

D. Continuar este proceso hasta que se obtienen n soluciones linealmente independientes[7].

7. Una matriz X(t) se llama una ***matriz fundamental de soluciones*** of (1) si sus columnas forman un conjunto de n soluciones linealmente independientes de (1).

8. Para cualquier matriz fundamental de soluciones de (1), X(t) tenemos que e^{At}=X(t).$X^{-1}(0)$, donde $X^{-1}(0)$ es la inversa de x(t) en t = 0. En particular, si las columnas de X(t), $X^j(t)$ satisfacen $X^j(0) = e_j$, para j =1, 2, . . .,n entonces X(t) = e^{At} .

Ejemplo 5

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ tiene tres valores propios reales diferentes λ 1, λ 3 and λ 5 ,y vectores propios correspondientes

$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\ y \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$, respectivamente, las soluciones linealmente independientes son:

$e^t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, e^{3t}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\ y\ e^{5t}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ entonces la matriz fundamental es $X(t)=\begin{pmatrix}e^t & e^{3t} & e^{5t}\\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t}\\ 0 & 0 & 2e^{5t}\end{pmatrix}$

$$X(0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix},\quad X^{-1}(0)=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

y $e^{At}=X(t).X^{-1}(0)=\begin{pmatrix}e^t & \frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{5t}\\ 0 & e^{3t} & -e^{3t}+e^{5t}\\ 0 & 0 & e^{5t}\end{pmatrix}$

Ejemplo 6

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ tiene tres valores propios diferentes $\lambda=1,\ \lambda=1+i$ and $\lambda=1-i$. El primer vector propio asociado es $\begin{bmatrix}0\\i\\1\end{bmatrix}$, así que la primera solución es $e^t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. Un vector propio asociado con el Segundo valor propio es $\begin{bmatrix}0\\i\\1\end{bmatrix}$, entonces $=e^{(1+i)t}\begin{bmatrix}0\\i\\1\end{bmatrix}$. Ahora,

$$e^t(\cos t+i\,sen t)\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=e^t\begin{bmatrix}0\\-sen t\\\cos t\end{bmatrix}+i\,e^t\begin{bmatrix}0\\\cos t\\sen t\end{bmatrix}$$

son dos soluciones reales, linealmente independientes, por lo tanto, la matriz fundamental es $X(t)=\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^t\cos t&-e^t\sin t\\0&e^t\sin t&e^t\cos t\end{pmatrix}$. Como $X(0)=I_3$, entonces $X(t)=e^{At}$.

Ejemplo 7

$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$ tiene únicamente un valor propio $\lambda=2$ y este tiene un único vector propio asociado $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, esto es, el espacio propio asociado a ese valor propio tiene dimensión uno. La solución asociada es $e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

Para encontrar las otras dos soluciones independientes requeridas, buscamos soluciones de $(A-2I)^2V=0$, esto es,

$$\begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Encontramos la solución paramétrica

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = w\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \text{con } w = 0 \text{ and } z = 1$$

obtenemos $V=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ que satisface $(A-2I)V\neq 0$ y $(A-2I)^2V=0$.

El segundo vector es

$$e^{At}V = e^{2t}.e^{(A-2I)t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{2t}\left[I + t(A-2I)\right]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, la tercera solución debe satisfacer

$(A-2I)^3V=0$, pero $(A-2I)^2V\neq 0$.

Así $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, esto lleva a la solución paramétrica $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = w\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, la solución $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ satisface los requeremientos, entonces

$$e^{At}V = e^{2t}.e^{(A-2I)t}V = e^{2t}\left[I + t(a-2I) + \frac{t^2}{2!}(t-2I)^2\right]V =$$

$$e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 3t \\ 0 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{2t}\begin{bmatrix} 3t - \frac{1}{2}t^2 \\ -t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así, la matriz fundamental es

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & (3t - \frac{1}{2}t^2)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

and como $X(0)=I_3$, entonces $X(t) = e^{At}$.

Otro caso de E.D.E lineal y de gran aplicación en la teoría de las tasas de interés es la siguiente

$$dx(t) = \alpha\, x(t)\, dt + \sigma\, dw(t)$$

$$x(0) = x_0$$

Y cuya solución es:

$$x_t = e^{\alpha t} x_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha (t-S)}\, dw_S$$

BIBLIOGRAFIA

- ARBELÄEZ L., J. (2003). Ecuaciones Diferenciales Estocásticas Aplicadas a la Valoración de Derivados Financieros. Tesis de Maestría en Matemáticas aplicadas. Universidad EAFIT.
- Braun, Martin (1993). Differential Equations and Their Applications. Fourth edition. Springer-Verlag.
- BJÖRK, Tomas (2004). Arbitrage Theory in Continuous Time. Second edition. Oxford University Press. New York.
- BOURGUIGNON, F.(1974). A Particular Class of Continuous-Time Growth Models. Journal of Economic Theory, 10, 239-257.
- CÁRCAMO C,U (1998). Procesos de Wiener. Revista Universidad EAFIT, 110, 39-51.
- MALLIARIS, A,G, y BROCK, W,A (1982). Stochastic Methods in Economics and Finance. North-Holland. Amsterdam.
- MERTON, R. (1975). An Asymptotic Theory of Growth under Uncertainty. Review of Economic Studies, 42, 141-183.
- MUSIELA, M. Y RUTKOWSKI, M.(1998) Martingale Methods in Financial Modelling. Springer-Verlag. Berlín.
- Pullman. N,J.(1976). Matrix Theory and Its Applications. Selected Topics. Marcel Dekker, Inc.
- SOLOW, R.M. (1956), A Contribution to the Theory of Economic Growth. Quarterly Journal of Economics, 70, 65-59.

CITAS

- 1. Javier Arbeláez L. y Ulises Cárcamo C. son ambos Licenciados en Matemáticas de la Universidad de Medellín y tienen título de Master en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT.

  Ulises Cárcamo C. es además Ph.d in Computational and Applied Mathematics de la University of Canterbury, New Zealand. Javier Arbeláez L. es profesor de tiempo completo del Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM) y catedrático de la Universidad EAFIT, Ulises Cárcamo es profesor de tiempo completo esta misma universidad.

  Fecha de recepción julio 26 de 2005. Fecha de aprobación septiembre 14 de 2005.
- 2. Un curso rápido de cálculo estocástico para aplicaciones a modelos económicos, primera parte, en el volumen 7, No. 14 de esta revista.
- 3. Acá el símbolo $\| \|$ denota la norma del vector o la matriz. Las condiciones (9) y (10) se llaman Condiciones deLipschitz sobre las funciones m y s, son familiares a quien ha estudiado ecuaciones diferenciales determinìsticas.
- 4. Como $\Phi(t)X_0$es una solución, el teorema de deexistencia asegura que esta solución es única.

- 5. Nótese que la noción de invariante bajo similaridad se aplica a tres clases diferentes de objetos: Funciones, conjuntos y propiedades.
- 6. Las columnas de P son los valores propios de A.
- 7. Este algoritmos se basa en el siguiente hecho:Si V satisface $(A-\lambda I)^m V=0$, para algún entero m, entonces la serie de $e^{(A-\lambda I)t}V$ termina después de m términos.