UN CURSO RÁPIDO DE CÁLCULO ESTOCÁSTICO PARA APLICACIONES A MODELOS ECONÓMICOS*

Primera parte

Javier Arbeláez L.
Ulises Cárcamo C[1].

RESUMEN

La importancia de las ecuaciones diferenciales estocásticas y, en general el cálculo estocástico, en las ciencias económicas no ha sido resaltada suficientemente en nuestro medio. A diferencia de las aplicaciones financieras, que han sido ampliamente difundidas, las aplicaciones de otras áreas de la economía son prácticamente desconocidas en nuestro entorno académico. Este curso elemental es una invitación a conformar grupos interdisciplinarios de estudiosos de la matemática y las ciencias económicas para abordar tales aplicaciones.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales estocásticas, procesos estocásticos, modelo neoclásico de crecimiento, producción factores capita y trabajo.

ABSTRACT

The importance of the stochastic differential equations, and, in general of the stochastic Calculus in Economics, has not been properly emphasized in our academic communities. Unlike the applications to finance, the applications of SDE to other areas of Economics are practically unknown in our academic environment. This elementary course is an invitation to create, inter-disciplinary groups of Mathematics and Economics to study such applications.

INTRODUCCIÓN

La importancia de las ecuaciones diferenciales estocásticas y en general, del cálculo estocástico en finanzas es evidente. Nadie puede preciarse de tener un conocimiento profundo de ciertos temas financieros, como por ejemplo los derivados, si no ha estudiado seriamente un curso de cálculo estocástico.

Ahora, un curso serio de este cálculo requiere de nociones de teoría de la medida, y procesos estocásticos, entre otros, que solo son accesibles a estudiantes avanzados de matemáticas.

Por otro lado, solamente el conocimiento de las herramientas matemáticas que se utilizan en finanzas no es garantía de que se comprendan los procesos financieros reales. Es por eso que se requiere de grupos interdisciplinarios, para una buena comprensión de estos temas.

En ciencias económicas, en general, la afirmación anterior también es cierta. El aprovechar el cálculo estocástico para estudiar ciertos aspectos de la economía requiere de grupos interdisciplinarios de matemáticos y economistas.

Éste es un curso rápido dirigido a aquellas personas interesadas en adquirir los rudimentos del cálculo estocástico para futuras aplicaciones en economía y ciencias afines.

Cálculo estocástico en ciencias económicas

Un primer acercamiento a las aplicaciones del cálculo estocástico en la economía se puede hacer incluyendo incertidumbre (y riesgo) en algunos de los modelos fundamentales.

Un modelo neoclásico de crecimiento

Consideremos una economía en la que se produce un solo bien. Esta producción requiere de solo dos insumos: El mismo bien y mano de obra.

El stock del bien dedicado a su producción se denotará mediante K y se llamará capital. Este stock no sufre depreciación alguna por el paso del tiempo o por utilización.

Sean Y la producción y L la cantidad de mano de obra que se usa en la producción. Sea L^0 la fuerza de trabajo y sean y = Y/L, k = K/L y como un caso particular 1 = L/L^0. (1)

En este modelo hacemos las siguientes suposiciones:

S1. Las posibilidades de producción de la economía se pueden representar por la función de dos variables, continua en R^2, Y = F(K, L) que satisface las siguientes propiedades.

(a) Para todo h > 0; hY = F(hK, hL) (2) (Retornos constantes a escala). También se podría asumir que F es homogénea de grado 1. Haciendo h = 1/L, obtenemos Y/L = F(K/L, 1) o y = f(k) (3)

(b) Suponemos válidas las Condiciones de Inada[2]:

f′(k) > 0 (f es una función creciente) y f″(k) < 0, (f es cóncava), para k en [0, ∞] (4).

Un primer acercamiento a las aplicaciones del cálculo estocástico en la economía se puede hacer incluyendo incertidumbre (y riesgo) en algunos de los modelos fundamentales.

Y además, f′(0) = ∞, f′(∞) = 0 (5).

S2. La mano de obra, L, crece a una razón geométrica constante n, es decir, $L = L(0).e^{nt}$ con 0 < n < 1 (6)

S3. Una fracción constante, s, del producto no se consume. Entonces, como condición de equilibrio, la producción que no se consume debe invertirse. Esto se puede expresar como:

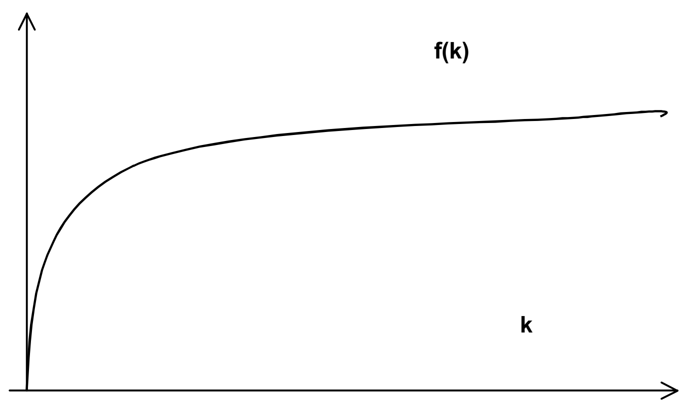
$$\frac{dK}{dt} = s.F(K,L), \quad 0 < s < 1 \qquad (7)$$

s es la propensión marginal al ahorro.

Ahora, $$\frac{dk}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\frac{dK}{dt}L - \frac{dL}{dt}K}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}.\frac{K}{L} = s.f(k) - nk \qquad (8)$$

así $\frac{dk}{dt} = s.f(k) - nk$ (9). A esta ecuación se le llama ecuación diferencial neoclásica de Solow[3], para el crecimiento.

Figura 1. Función f que cumple las condiciones de Inada



Inclusión de la incertidumbre por medio de una ecuación diferencial estocástica

Una de las primeras extensiones posibles de modelo es el poder incluir una fuerza laboral que varía en forma estocástica.

Asumiremos que la variación se puede escribir en la forma $dL = nL.dt + \sigma Ldz$ (9.a) donde dt es un diferencial de tiempo, determinístico, y dz es el diferencial de un proceso de Wiener, estocástico. σ es una constante a la que podemos denominar "volatilidad de la fuerza laboral" que es una medida de la variabilidad de dicha fuerza laboral.

Quienes conocen las nociones básicas del cálculo estocástico pueden saltar las siguientes secciones. Estas muestran los fundamentos de este cálculo, de una manera rápida y concisa. De tal manera que alguien sin estos fundamentos puede adquirir una idea general, de una manera rápida. Un tratamiento semi-formal requiere nociones de procesos estocásticos y teoría de la medida, pero el nivel que presentamos acá se focaliza en los resultados fundamentales y, por tanto, prescinde de herramientas tan sofisticadas y requiere sólo de nociones básicas de la teoría de la probabilidad y de procesos estocásticos tal como se presenta en los cursos de investigación de operaciones.

Una introducción elemental al cálculo estocástico

Procesos de Wiener

Definimos un proceso de Wiener[4] de manera semi-formal, de la siguiente manera:

Caracterizaremos un proceso estocástico (estándar) de Wiener $\{W(t)\}$ mediante el siguiente conjunto de propiedades:

1. $W(0) = 0$ (El proceso comienza en cero)
2. Sus diferencias $\Delta W(t) = W(t) - W(s)$ tienen una distribución normal con media 0 y varianza $t\text{-}s = \Delta t$, para todo $s < t$.

3. Para todo $s < t \leq v < x$ las diferencias $W(t) - W(s)$ y $W(x) - (v)$ son variables aleatorias independientes.

4. Las trayectorias de un proceso de Wiener son continuas.

El parámetro t, representará tiempo.

Al proceso estocástico $\{\Delta W(t)\}$ se le conoce como ruido blanco gaussiano[5] y es bastante útil en la simulación de los procesos de Wiener, las integrales estocásticas y las ecuaciones diferenciales estocásticas.

A partir de esta definición se pueden probar las propiedades reunidas en el siguiente lema:

Lema 1

El ruido blanco gausiano, $\{\Delta W(t)\}$, tiene las siguientes propiedades:

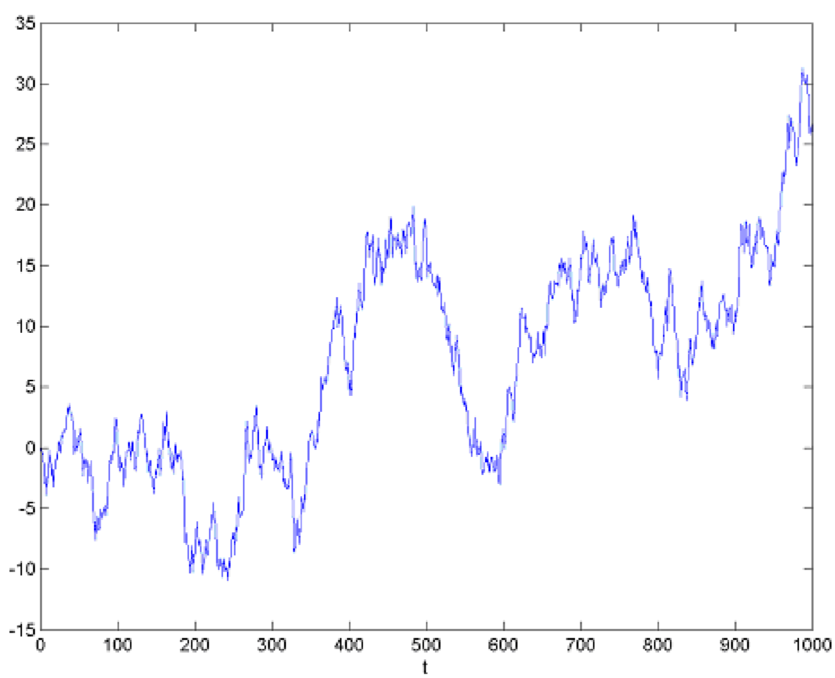
1. $E[\Delta W(t)] = 0$. Valor esperado nulo.
2. $E[(\Delta W(t))^2] = Var[\Delta W(t)] = \Delta t$.
3. $Var[[(\Delta W(t))^2] = 2(\Delta t)^2$.

La simulación de ruido blanco y de las trayectorias de un proceso de Wiener es relativamente fácil.

La figura número dos muestra una trayectoria simulada en Matlab.

Como esta es una simulación discreta de un proceso continuo, la trayectoria está representada sólo como una aproximación.

Figura 2. Una trayectoria de un Proceso de Wiener



El lema siguiente enuncia una de las propiedades más importantes de las trayectorias.

Lema 2

Las trayectorias de un proceso de Wiener son curvas continuas que no son diferenciables en ningún punto.

Esta es la razón por la cual no podemos representar esas trayectorias de una manera más exacta.

Integrales estocásticas

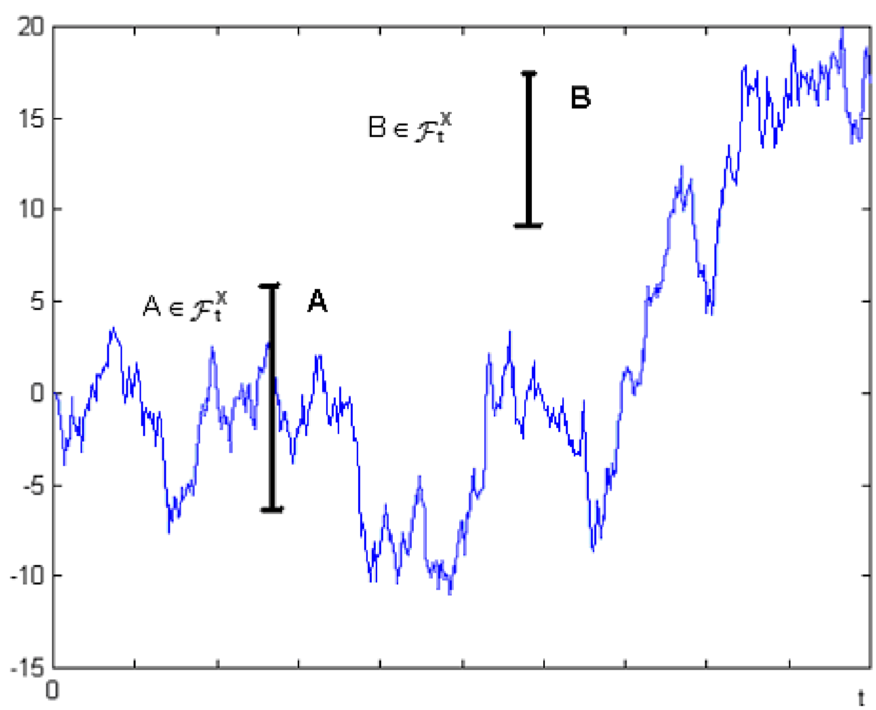
Las integrales estocásticas son generalizaciones de las integrales que hemos estudiado en el cálculo elemental en el sentido de que son sumas infinitas. Una aproximación semi-intuitiva a este tipo de integrales se logra después de entender las siguientes ideas:

La información generada por un proceso estocástico

Consideremos el proceso estocástico $\{X(t)\}$ [6]

1. Sea A un evento. Escribiremos $A \in F_t^x$ si, basados en observaciones de la trayectoria $\{X(t), 0 \leq s \leq t\}$ es posible saber si A has ocurrido o no.
2. Sea Z una variable aleatoria. Escribimos $Z \in F_t^x$ si, podemos determinar

Figura 3. Información generada por el Proceso X



completamente el valor de Z basados en observaciones de la trayectoria $\{X(t), 0 \leq s \leq t\}$.

3. Sea $\{Y(t)\}$ un proceso estocástico, si para todas las variables aleatorias $Y(t)$ con $0 \leq t$, se cumple que $Y(t) \in F_t^x$, entonces decimos que $\{Y(t)\}$ es **adaptado** a la **filtración**[7] $\{F_t^x\}_{t \geq 0}$. Interpretamos el símbolo F_t^x como "la información generada por el proceso $\{X\}$ en el intervalo $[0, t]$".

Por ejemplo, si el precio de una acción está representada por el proceso $\{S(t)\}$, tenemos 1,000 de esas acciones y queremos venderlas en algún instante en el intervalo $[0, t]$, entonces, nuestras ganancias serán un proceso estocástico adaptado a la filtración $\{F_t^s\}_{t \geq 0}$.

Condiciones de integrabilidad

Consideremos un proceso de Wiener, W

1. Decimos que el proceso g pertenece a la clase $L^2[a, b]$ si es adaptado a la filtración $\{F_t^w\}_{t \geq 0}$ y tal que $\int_a^b |g(s)|^2 ds < \infty$[8].

Las trayectorias de un proceso de Wiener son curvas continuas que no son diferenciables en ningún punto.

■

2. Decimos que el proceso g pertenece a la clase L^2 si $g \in L^2[0, t]$ para todo $t > 0$.

La integral estocástica, en el sentido de Itô[9], para procesos simples

Los procesos estocásticos simples son los análogos aleatorios de las funciones escalonadas. Usualmente la integral elemental se define, de manera natural, para funciones escalonadas y luego se aprovecha el hecho de que la mayoría de las funciones de mayor uso se pueden aproximar mediante funciones escalonadas, para extender la noción de integral a esas funciones, mediante un paso al límite. De manera semejante se hace esto con los procesos estocásticos.

Un proceso estocástico g se dice que es simple en $[a, b]$ si existe un conjunto de puntos determinísticos $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ y un conjunto de constantes $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ tales que $g(t) = ck$ si $t_k \leq t < t_{k+1}$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Esto es, g es constante en cada subintervalo.

Para cada proceso simple g en $L^2[a, b]$ definimos la integral estocástica en $[a, b]$ mediante $\int_a^b g(s)dW(s) = \sum_{k=0}^{n-1} g(k)\left[W(t_{k+1}) - W(t_k)\right]$[10]

La integral estocástica, en el sentido de Itô, para procesos más generales

Dado un proceso g en L^2 [a, b] tenemos los siguientes hechos:

1. Existe una sucesión de procesos simples $\{g_n\}$ tal que $E\left[\int_a^b \{g_n(s)-g(s)\}^2\right] ds \to 0$ cuando $n \to \infty$.

2. Es posible definir $Z_n = \int_a^b g_n(s)dW(s)$ para cada n.

3. La sucesión Z_n tiene un límite, Z, cuando $n \to \infty$.

Así definimos la integral estocástica de g como ese límite Z, es decir,

$$\int_a^b g(s)dW(s) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b g_n(s)dW(s).$$

Las propiedades más importantes de la integral estocástica

Lema 3

Sea g un proceso en L^2 [a, b] y sea $Z = \int_a^b g(s)dW(s)$, entonces las siguientes propiedades se cumplen:

1. $E(Z) = 0$ (El valor esperado de la integral estocástica es cero).
2. $E(Z^2) = \int_a^b E\left[|g(s)|^2\right] ds$
3. Z es F_b^w-medible[11].

Como puede verse, el valor esperado de esta integral es cero. Esta es una de las propiedades de los juegos, actuarialmente, justos. Una generalización, bastante útil del concepto de juego justo es la noción de martingala.

Martingalas

Aunque una definición formal de la noción de martingalas necesita de conceptos de la Teoría de la Medida, en esta introducción al cálculo estocástico damos una noción semi-intuitiva.

Esperanzas condicionales

Consideremos la filtración (flujo de información[12]) $\{F_t\}_{t\geq 0}$. Si Y es una variable aleatoria, $E[Y/F_t]$ es el "valor esperado de Y dada la información disponible en el tiempo t". Para un t fijo, $E[Y/F_t]$ es una variable aleatoria. Si toda la información se obtiene a partir de un solo proceso, X, entonces F_t y $E[Y/F_t]$ dependen de la trayectoria $\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$.

Dos importantes propiedades de las esperanzas condicionales

1. Si Y and Z son variables aleatorias y Z es F_t-medible entonces $E[Z.Y/F_t] = Z.E[Y/F_t]$
2. Si Y es cualquier variable aleatoria y $s < t$, entonces $E[E[Y/F_t]/F_s] = E[Y/F_s]$ **(Ley de las Esperanzas Iteradas)**

F_t-Martingalas

Un proceso estocástico X se llama una F_t-martingala si cumple las siguientes condiciones:

1. X es adaptado a la filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$.
2. $E[|X(t)|] < \infty$ para todo t.
3. Para todo s y t, $s \leq t$, $E[X(t)/F_s] = X(s)$.

Intuitivamente hablando, una martingala es un proceso estocástico tal que la mejor predicción que de él se puede hacer, dada cierta información disponible, es simplemente, el valor actual observado.

Esta noción está íntimamente relacionada con la Hipótesis débil de los Mercados Eficientes.

Integrales estocásticas como martingalas

Lema 3

Para cualquier proceso $g \in L^2$, el proceso X definido como $X(t) = \int_0^t g(s)dW(s)$ es una F_t^w- -martingala.

Esta es la propiedad que hace que las integrales estocásticas, tal como se han definido acá sean apropiadas para modelar precios de acciones[13]. La forma débil de la Hipótesis de los Mercados Eficientes establece que los precios actuales reflejan, de manera completa, la información contenida en las series de precios históricos. Así, los inversionistas no pueden concebir ninguna estrategia para obtener ganancias fuera de lo común, de una manera consistente, basados en la información disponible para el público y el mejor pronóstico para mañana es el precio de hoy.

Diferenciales estocásticos

Sea X un proceso estocástico y supongamos que existe un número real x_0 y dos procesos F_t^w-adaptados μ and σ tales que $X(t) = x_0 + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(t)$ (10) para todo $t \geq 0$. Podemos escribir (10) usando notación diferencial, en la forma, $dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$ (11), $X(0) = x_0$ (12) decir que **X tiene un diferencial estocástico**

Uno de los objetivos más importantes del cálculo estocástico es encontrar el diferencial de una función de un proceso estocástico (con diferencial) y del tiempo. El siguiente lema da condiciones suficientes para que el diferencial de una tal función exista y, además, muestra cómo calcularlo.

dado por (11) con una condición inicial dada por (12).

Hablando formalmente, (11) es una forma corta de representar (10). Hablando de manera intuitiva, (11) representa la ***dinámica infinitesimal*** de X. El término $\mu(t)dt$ in (11) se llama el término de tendencia (***drift***), y $\sigma(t)dW(t)$ se llama el término aditivo de ruido gaussiano.

Hablando informalmente, un proceso estocástico que satisface una ecuación de la forma $X(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$ se llama un proceso (estocástico) de difusión. Estos procesos están relacionados con los modelos determinísticos que representan difusiones físicas, por ejemplo la difusión observada en el proceso de ósmosis.

Aplicación al modelo de Solow

El lector atento ya habrá notado que en la ecuación diferencial estocástica de la fuerza laboral en el Modelo de Solow, el término de tendencia es nLdt y el término aditivo de ruido gaussiano es $\sigma.Ldz$. También sabrá que otra forma, equivalente, de representar este modelo es $L(t) = L_0 + \int_0^t n.L(S)ds + \int_0^t \sigma.L(S)dz$ (13).

También de (9a) se puede deducir que $\frac{dL}{L} = ndt + \sigma dz$ (13 a), esto significa que la proporción del crecimiento de la fuerza d trabajo, para un corto período de tiempo, dt, tiene distribución normal con media n.dt y varianza $\sigma^2.dt$.

El teorema de representación como Martingala

El Lema 3 establece que toda integral estocástica (del tipo Itô) es una martingala, existe una especie de versión recíproca, que establece que, bajo ciertas circunstancias, cada martingala se puede representar como una integral de Itô:

Lema 4

Sea $\{M_t\}_{0 \le t \le T}$ una martingala continua de cuadrado integrable respecto a $\{F_t\}$. Entonces existe un único proceso estocástico $f \in L^2$ tal que $M_t = M_0 + \int_0^t f(s)dW(s)$ (14) para $t \in [0,T]$.

Diferencial de una martingala

En virtud de la equivalencia entre las notaciones integral y diferencial, podemos escribir (14) como $dM(t) = f(s)dW(s)$ (15), that is, ***un proceso estocástico, que tiene un diferencial, es una martingala sí y solo sí su diferencial no tiene término de tendencia.***

La Fórmula (Lema) de Itô

Uno de los objetivos más importantes del cálculo estocástico es encontrar el diferencial de una función de un proceso estocástico (con diferencial) y del tiempo. El siguiente lema da condiciones suficientes para que el diferencial de una tal función exista y, además, muestra cómo calcularlo.

Lema 4 (Lema de Itô)

Sea X un proceso estocástico con diferencial estocástico $dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$ donde μ y σ son procesos adaptados, y sea $f= f(t, x)$ una función $C^{1,2}$ [14]. Definamos el proceso Z mediante $Z = f(t, X(t))$. Entonces Z tiene un diferencial estocástico, dZ, dado por

$$dZ = df(t,X(t)) = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\}dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial x}dW(t) \qquad (15)$$

Ejemplo 1

Sea Z el proceso definido mediante $Z(t) = W^4(t)$, donde W(t) es el proceso de Wiener. Es decir, Z(t) es la cuarta potencia de un proceso de Wiener. Identificando W(t) con X(t) y dado que $dW(t) = 0.dt + 1.dW(t)$, $W(0) = X(0) = 0$, ($\mu = 0$ y $\sigma = 1$), y $f(t, x) = x^4$, entonces $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 4.x^3$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x^2$. Substituyendo en la fórmula de Itô (15), obtenemos $dZ(t) = 6.W^2(t)dt + 4.W^3(t).dW(t)$, $Z(0)= 0$. Este es el diferencial de $W^4(t)$.

Ecuaciones diferenciales estocásticas

El lema de Itô permite encontrar el diferencial de una función de un proceso estocástico. Ahora podemos pensar de una manera, en cierto sentido inversa, dada una expresión diferencial y una condición inicial, existe un proceso estocástico que los satisfaga? Resolver este problema es resolver una ecuación diferencial estocástica.

El siguiente lema da condiciones suficientes para la existencia de soluciones de la ecuación diferencial estocástica (EDE) $dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$, $X(0) = x_0$ (16)

Lema 5

Supongamos que existe una constante K tal que para todo x, todo y, y todo t $|\mu(t,x)-\mu(t,y)| \leq K|x-y|$, $|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq K|x-y|$ and $|\sigma(t,x)|+|\mu(t,x)| \leq K(1+|x|)$, entonces existe una solución X(t) a la ecuación (16) que tiene las siguientes propiedades:

1. X es un proceso F_t^W-adaptado.
2. X tiene trayectorias continuas.
3. X es un proceso de Markov,
4. Existe una constante C tal que $E[|X(t)|] \leq Ce^{Ct}(1+|x_0|^2)$.

Movimiento Browniano Geométrico (MBG)

Uno de los procesos estocásticos más importantes en finanzas es el así llamado Movimiento Browniano Geométrico. En el modelo de Black-Scholes para valoración de opciones se supone que el precio del activo subyacente sigue este proceso. Un MBG se define como la solución a la EDE $dX(t) = \alpha.X(t)dt + \sigma.X(t)dW(t)$; $X(0) = x_0$ (17), donde α y σ son constantes, $\sigma > 0$.

Esta es una de las pocas EDE que tiene una solución simple.

Lema 6

La solución de la EDE (17) está dada por $X(t) = x_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma.W(t)}$ (18); su valor esperado es $E[X(t)] = x_0 e^{\alpha.t}$ (19)[15].

La figura 4 muestra el valor esperado y algunas de las trayectorias de un proceso browniano geométrico.

Movimiento Browniano Geométrico en la fuerza laboral del modelo de Solow

Si echamos otra mirada a la ecuación (9a) en el modelo de Solow, $dL = nL.dt + \sigma L dz$, con $L(0) = L_0$, vemos que esta es precisamente la ecuación de un MBG. La solución es $L = L_0.e^{(n-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma.Z(t)}$ lo que indica que en este modelo modificado, la fuerza laboral se comporta de manera similar al proceso de la figura 4.

A pesar de todo esto, si queremos estudiar el efecto de considerar la fuerza laboral como un movimiento browniano geométrico en el diferencial dk, necesitamos ampliar las nociones vistas a procesos de dos dimensiones. La razón es evidente: k depende de dos variables, K y L.

Generalizaciones: Procesos en dos dimensiones

En muchas de las aplicaciones, se consideran procesos estocásticos relacionados con más de una fuente de aleatoriedad. El caso típico se presenta cuando se tiene un portafolio de inversiones, digamos que contiene n activos, y una gran cantidad de los precios de los activos financieros que conforman el portafolio varían aleatoriamente, digamos, **d**, de los n. En estos casos la descripción del portafolio necesitará de **d** procesos estocásticos. Se puede tener una primera aproximación utilizando un proceso browniano d-dimensional.

Antes de hacer la extensión a d-dimensiones, en aras de facilitar esa transición de 1 a d, estudiaremos procesos estocásticos relacionados con procesos brownianos de dos dimensiones.

Proceso de Wiener y diferenciales Bi-dimensionales

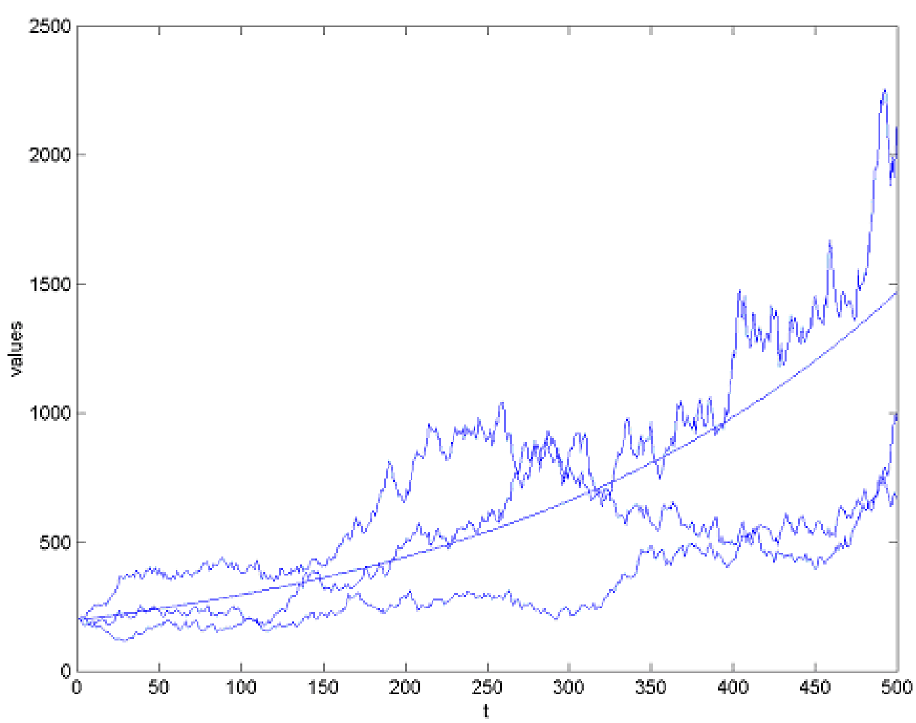
Consideremos un proceso $W = [W_1, W_2]^T$, donde W_1 y W_2 son dos procesos de Wiener independientes "T" denota trasposición. Sea $\mu = [\mu_1(t), \mu_2(t)]^T$, el **vector de tendencia** y sea σ la **matriz de difusión** definida por

$\sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t) & \sigma_{12}(t) \\ \sigma_{21}(t) & \sigma_{22}(t) \end{bmatrix}$ y supongamos que el proceso bi-dimensional **X** = $[X_1, X_2]^T$, tiene un diferencial estocástico de la forma

$\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{bmatrix} .dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t) & \sigma_{12}(t) \\ \sigma_{21}(t) & \sigma_{22}V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix}$ (20) que puede ser escrito en forma más compacta como $dX(t) = \mu(t)\,dt + \sigma(t).\,dW(t)$. Este es un ejemplo de un diferencial estocástico bidimensional.

Definamos el proceso Z, mediante, $Z = f(t, \mathbf{X}(t))$ donde f es una función de R^3 en R que es derivable una vez con respecto a t y dos veces con respecto a cada una de las componentes de **X**, es decir una función $C^{1,2}$. ¿Qué forma dZ? La respuesta nos la da una generalización del lema de Itô que enunciamos a continuación:

Figura 4. Media y trayectoria de un Movimiento Browniano Geométrico



Lema 7 (Fórmula de Itô de dos dimensiones)

Sea X un proceso bi-dimensional con diferencial estocástico de la forma $dX(t) = \mu(t)\,dt + \sigma(t).\,dW(t)$ y sea $f = f(t, X(t))$ una función $C^{1,2}$, entonces:

1. f tiene un diferencial estocástico dado por

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} + \mu_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{1}{2} S_1 \quad dt + S_2$$ (21), donde

$$S_1 = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2(\sigma_{21}\sigma_{11} + \sigma_{22}\sigma_{12})\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + (\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$ (22) y

$$S_2 = (\sigma_{11} + \sigma_{21})\frac{\partial f}{\partial x_1} dW_1 + (\sigma_{12} + \sigma_{22})\frac{\partial f}{\partial x_2} dW_2 \quad (23)$$

2. La expresión (21) equivale a la siguiente

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1} dX_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dX_2 + \frac{1}{2} S$$ (24), donde

$$S = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dX_1.dX_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dX_1.dX_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dX_2.dX_2$$ (25) y se aplica

la siguiente tabla

3. de multiplicación formal:

$$\begin{aligned} (dt)^2 &= 0 \\ dt.dW_i &= 0, \; i = 1, 2 \\ (dW_i)^2 &= dt, \; i = 1, 2 \\ dW_i.dW_j &= 0, \; i = 1, 2 \end{aligned} \quad (26)$$

El lector interesado puede comprobar fácilmente que, efectivamente la expresión (24) se convierte en la expresión (21) después de aplicar la tabla de multiplicación formal.

A la función f y al proceso de la expresión (20).

El aspecto del diferencial dk en el modelo de Solow con Incertidumbre

Con la nueva herramienta del lema 7, podemos abordar el problema de determinar el diferencial de k, con el nuevo supuesto de la ecuación 9a.

Sabemos que y por tanto esta es la nueva función que en el lema aparece denotada por f. Además dX_1 y dX_2, son, respectivamente dK y dL que están dados por

dK= s.F(K, L)dt,

$dL = nL.dt + \sigma L dz$, donde hacemos notar que dK no tiene término aditivo de ruido gaussiano.

Aplicando (24) y (25) con f = k, x_1= K, x_2 = L, dw_1 = 0, dw_2= dz obtenemos

$$dk = \frac{\partial k}{\partial t}dt + \frac{\partial k}{\partial K}dK + \frac{\partial k}{\partial L}dL + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 k}{\partial K^2}(dK)^2 + 2\frac{\partial^2 k}{\partial K \partial L}dKdL + \frac{\partial^2 k}{\partial L^2}(dL)^2\right] \quad (27)$$

Ahora, $\frac{\partial k}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial k}{\partial L} = -\frac{K}{L^2}$, $\frac{\partial k}{\partial K} = \frac{1}{L}$, $\frac{\partial^2 k}{\partial K^2} = 0$, $\frac{\partial^2 k}{\partial K \partial L} = -\frac{1}{L^2}$ y $\frac{\partial^2 k}{\partial L^2} = \frac{2K}{L^3}$.

Sustituyendo en estas expresiones en (27) obtenemos

$$dk = 0 - \frac{K}{L^2}dL + \frac{1}{L}dK + \frac{1}{2}\left[0 + 2\left(-\frac{1}{L^2}\right)dKdL + 2\frac{K}{L^3}(dL)^2\right]$$

$$dk = 0 - \frac{K}{L^2}dL + \frac{1}{L}dK + \frac{1}{2}\left[0 + 2\left(-\frac{1}{L^2}\right)dKdL + 2\frac{K}{L^3}(dL)^2\right]$$

$$= -\frac{K}{L^2}(nLdt + \sigma Ldz) + \frac{1}{L}dk + \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{L^2}dKdL + \frac{2K}{L^3}\left(n^2L^2(dt)^2 + 2n\sigma dtdz + \sigma^2L^2(dz)^2\right)\right],$$

después de aplicar (26) llegamos a

$dk = \frac{K}{L^2}(nLdt + \sigma Ldz) + \frac{dK}{L} - \frac{dK}{L}\frac{dL}{L} + \frac{1}{2}\left[\frac{2K}{L^3}\sigma^2L^2dt\right]$, después de hacer algunas transformaciones y aplicar de nuevo la tabla de multiplicación (27) llegamos a

$dk = \left(-\frac{nK}{L} + \frac{sF(K,L)}{L} + \frac{K\sigma^2}{L}\right)dt - \frac{K\sigma}{L}dz$, que se convierte en

$$dk = \left[sf(k) - k\left(n - \sigma^2\right)\right]dt - k\sigma dz \quad (28)$$

Notamos que tanto la parte determinística (tendencia) como la parte estocástica del diferencial de k están afectados por la volatilidad de la fuerza laboral.

De otra manera más comprensible podemos decir que las fluctuaciones aleatorias en k, dependen, como lo podíamos haber sospechado, de las fluctuaciones aleatorias en la fuerza laboral.

Pensar un poco en los resultados

Naturalmente, como los modelos matemáticos son sólo representaciones de la realidad, es pertinente analizar bajo qué condiciones es plausible la descripción del comportamiento de la fuerza laboral como un movimiento browniano geométrico. Esta es una tarea que dejamos a un grupo de estudiosos de la matemática y la economía. Esta podría ser un primer proyecto para un grupo interdisciplinario de esa categoría. Un segundo proyecto podría ser investigar la plausibilidad de tales supuestos en Colombia y Latino-América. Un tercero: suponiendo que estos modelos son apropiados, ¿cómo se harían las estimaciones de los parámetros? Valiosas ayudas para este último proyecto serán presentada en la segunda parte de este curso.

Unos ejercicios

Como en todo curso, los ejercicios son herramientas fundamentales para la comprensión de los temas vistos. La incapacidad para resolverlos denota, generalmente que el contenido del curso no se comprende al nivel correcto.

Para detectar el nivel de comprensión alcanzado, le sugerimos al lector que intente resolver los siguientes ejercicios:

1. Resolver $dX = 0.5\,X.dt + 0.03\,X\,dW$, $x(0) = 1$, cual es el valor esperado de X?
2. Simular en una hoja electrónica 10 trayectorias del proceso anterior.
3. Por medio de simulación, estime el valor esperado de $X(1)$ y compare su estimación con la que puede obtenerse de la solución del primer ejercicio.
4. Si a es una constante y $W(t)$ el proceso de Wiener, encuentre el diferencial estocástico del proceso $y = e^{a.W(t)}$.
5. Demuestre que la expresión (24) es equivalente a la expresión (21).

6. Si X e Y tienen diferenciales estocásticos respectivos; $dX = \mu_1.dt + \sigma_1 dW_1$, $X(0) = X_0$, $dY = \mu_2.dt + \sigma_2 dW_2$, $Y(0) = Y_0$, donde W_1 y W_2 son procesos de Wiener independientes, $Z = X.Y$, $U = X/Y$, encuentre los diferenciales de Z y U.

7. ¿Qué implicaciones en cuanto al comportamiento probabilístico de sus incrementos (variaciones) tiene la suposición de que una cierta variable económica se puede describir como un diferencial estocástico?

Lo que sigue

En la próxima parte profundizaremos en el Modelo de Solow, presentaremos otros modelos susceptibles de ser modificados con la introducción de incertidumbre y extenderemos los resultados obtenidos de 2 a n variables. Esperamos que esta pequeña contribución ayude efectivamente a la conformación de grupos interdisciplinarios para el estudio de modelos de ecuaciones diferenciales estocásticas en las ciencias económicas.

REFERENCIAS

1. ARBELÄEZ L., J. (2003). Ecuaciones Diferenciales Estocásticas Aplicadas a la Valoración de Derivados Financieros. Tesis de Maestría en Matemáticas aplicadas. Universidad EAFIT.

2. BJÖRK, Tomas (2004). Arbitrage Theory in Continuous Time. Second edition. Oxford University Press. New York.

3. BOURGUIGNON, F. (1974). A Particular Class of Continuous-Time Growth Models. Journal of Economic Theory, 10, 239-257.

4. CÁRCAMO C,U (1998). Procesos de Wiener. Revista Universidad EAFIT, 110, 39-51.

5. MALLIARIS, A,G, y BROCK, WA (1982). Stochastic Methods in Economics and Finance. North-Holland. Amsterdam.

6. MERTON, R. (1975). An Asymptotic Theory of Growth under Uncertainty. Review of Economic Studies, 42, 141-183.

7. MUSIELA, M. Y RUTKOWSKI, M. (1998) Martingale Methods in Financial Modelling. Springer-Verlag. Berlín.

8. SOLOW, R.M. (1956), A Contribution to the Theory of Economic Growth. Quarterly Journal of Economics, 70, 65-59.

NOTAS

1 Javier Arbeláez L. y Ulises Cárcamo C. son ambos Licenciados en Matemáticas de la Universidad de Medellín y tienen título de Master en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT. Ulises Cárcamo C. es además candidato a Ph.d in Computational and Applied Mathematics (Finance) de la University of Canterbury, New Zealand. Javier Arbeláez L es profesor de tiempo complete del Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM) y catedrático de la Universidad EAFIT, Ulises Cárcamo es profesor de tiempo completo esta misma universidad. Fecha de recepción: septiembre 17 de 2004. Fecha de aprobación: octubre 15 de 2004.

2 En nombre del economista Ken-Ichi Inada

3 Robert Solow, Premio Nóbel de Economía, 1987

4 En honor del Matemático Norbert Wiener.

5 Esto es porque, en analogía con la luz blanca, este contiene todas las frecuencias.

6 No está demás recordar que un proceso estocástico es una familia indexada de variables aleatorias.

7 Estrictamente hablando, una filtración es una familia creciente de sub-sigma álgebras de la sigma álgebra en la que está definida el proceso estocástico. Una sigma álgebra es una clase cerrada de eventos que representa información. En este caso la filtración se puede interpretar como un flujo de información generado por el proceso X desde $t = 0$.

8 En general esta integral es de las llamadas Integrales de Lebesgue y esta condición debe interpretarse como ***casi seguramente***. Es decir, el conjunto de puntos donde no se cumple es despreciable, desde el punto de vista de la Teoría de la Medida. Esta propiedad se enuncia diciendo que **el proceso g debe ser de cuadrado integrable**.

9 En nombre de Kiyoshi Itô. Existe también la integral de Stratonovich, pero esta nos e usa en finanzas.

10 Parece ser similar a una integral de Stietljes, sin embargo es bastante diferente.

11 Hablando intuitivamente, la distribución de probabilidades de la integral se puede obtener con la ayuda de las trayectorias del proceso de Wiener en [a,b].

12 Por ejemplo, la información generada por todos lo eventos observados hasta el instante t.

13 La integral de Stratonovich, en general, no es una martingala.

14 Esto quiere decir, $f = f(t,x)$ Es una vez diferenciable con respecto a t y dos veces diferenciable con respecto a x.