

# CUADRILATERIZACIÓN DE UNA MALLA TRIANGULAR USANDO ANÁLISIS ESPECTRAL Y TEORÍA DE MORSE

Sandra Mateus<sup>1</sup>

Recibido: 02/03/2007

Aceptado: 16/04/2008

## RESUMEN

La reparametrización de las mallas triangulares es uno de los procesos fundamentales usados por casi todos los sistemas de procesamiento geométrico. La mayoría de trabajos se han enfocado en el remallado triangular; el problema igualmente importante de la reparametrización de superficies trianguladas en cuadriláteros ha permanecido por mucho tiempo sin dirección. A pesar de la falta relativa de atención, la necesidad de métodos de reparametrización cuadrilaterales de calidad es de gran importancia en varias áreas de computación gráfica y visión por computador. En este artículo se muestra un acercamiento al problema de cuadrilaterización de mallas triangulares. Aplicando un análisis de la teoría de Morse a los valores propios de una malla laplaciana, se implementa un algoritmo que cuadrilateriza superficies triangulares. Debido a las propiedades del operador laplaciano, los parches cuadrilaterales resultantes se forman adecuadamente y se levantan directamente de las propiedades intrínsecas de la superficie.

**Palabras clave:** cuadrilaterización, teoría de Morse, análisis espectral, mallas triangulares.

---

<sup>1</sup> Ingeniera de Sistemas, M.Sc en Ingeniería de Sistemas, Docente Tiempo Completo, Facultad de Ingenierías - Área de Informática, Politécnico Jaime Isaza Cadavid. Carrera 48 N° 7-151 Of. P19-146, Medellín - Colombia . Tel: 3197900, Ext: 477. E-mail: spmateus@elpoli.edu.co

# QUADRILATERALIZATION OF A TRIANGULAR NET USING SPECTRAL ANALYSIS AND MORSE THEORY

## ABSTRACT

Reparametrization of triangular nets is one of the basic processes used by almost all geometric processing systems. Most works have been focused on the triangular netting. A problem which is also important about triangled surface reparametrization in quadrilaterals has gone adrift for a long time. In spite of a relative lack of attention, a need for quality quadrilateral reparametrization methods is extremely important in several areas such as graphic computation and computer visualization. This article shows an approach to the triangle net quadrilateralization issue. By applying Morse theory to Laplace's net own values, a logarithm which quadrilateralizes triangular surfaces is implemented. Due to the properties of Laplace's operator, resulting quadrilateral patches are appropriately formed and directly lifted from intrinsic properties of the surface.

**Keywords:** quadrilateralization, Morse theory, spectral analysis, triangular nets

## INTRODUCCIÓN

Las mallas triangulares con frecuencia exhiben varias deficiencias. Ellas son frecuentemente parametrizadas con resoluciones inapropiadas, y típicamente contienen muchos elementos formados de manera inadecuada. Debido a la constante ocurrencia de mallas deficientes, la habilidad de segmentar las superficies en regiones formadas adecuadamente y de reparametrizar superficies con mallas bien formadas es de importancia crítica en casi todos los sistemas de procesamiento de mallas.

La mayoría de trabajos reportados en la literatura sobre métodos de remallado se han enfocado en el problema de producir mallas triangulares. Sin embargo, la habilidad para producir mallas cuadrilaterales es también de gran importancia. Los cuadriláteros son las primitivas preferidas para el modelamiento de muchos objetos y en muchos dominios de aplicación. Muchas formulaciones de subdivisión de superficies como los Splines y las NURBS requieren bases cuadrilaterales complejas; descomponer una superficie en cuadriláteros bien formados provee un medio casi natural para la construcción de parches NURBS. Recientemente se han desarrollado métodos para cuadrilaterizar automáticamente superficies complejas (Dong et al, 2005); dichos métodos son bastante complicados, difíciles de implementar y cuentan con múltiples componentes heurísticos.

En este artículo, se presenta una metodología para construir bases cuadrilaterales complejas sobre superficies trianguladas de topología arbitraria. En contraste a las aproximaciones basadas en agrupamiento heurístico, la metodología expuesta sugiere trabajar sobre las propiedades intrínsecas de la forma de la superficie. Esta cuadrilateración base produce mallas compuestas exclusivamente de cuadriláteros y con un número pequeño de puntos. Para descomponer una superficie en parches cuadrilaterales, se introduce un análisis de la teoría

de Morse del espectro de la malla triangulada. Los vectores propios de la matriz laplaciana discreta son usados para definir los campos escalares sobre una superficie triangulada, tal que el extremo de un campo dado se da a una frecuencia deseada. La extracción del complejo Morse-Smale de los campos escalares provee una descomposición de la superficie que es cuadrilateral en superficies complejas y con topología arbitraria.

## I. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Una malla dada representa un muestreo organizado de algunas superficies fundamentales, descompuestas en una colección arreglada de polígonos. Sin embargo, este muestreo no provee, generalmente, un ajuste deseable para todas las aplicaciones. Consecuentemente, el reparticionamiento y el remuestreo de una malla son herramientas necesarias en los sistemas de procesamiento de mallas. Esto está involucrado en un número considerable de problemas, que han sido extensamente estudiados. Aquí se revisan los más relevantes.

### I.1 Remallado

Las mallas de superficie producidas por sistemas de reconstrucción automática son frecuentemente mal preparadas por pasos de procesamiento subsecuentes. Su densidad de muestreo es frecuentemente insensitiva a la forma subyacente y ellas tienden frecuentemente a exhibir artefactos indeseables tales como vértices de alta valencia, ángulos muy pequeños o muy grandes, distribuciones de bordes pobres, etc. Consecuentemente, muchos métodos de remallado han sido desarrollados para corregir estas deficiencias.

#### 1.1.1 Simplificación de la malla.

Las mallas pueden ser construidas desde nubes de puntos, datos de rango y de extracción de isosuperficies. La forma objetivo puede casi siempre ser representada muy bien usando unos polígonos dis-

tantes entre sí. Muchos métodos de simplificación de superficies han sido desarrollados para derivar tales aproximaciones simples automáticamente (Garland et al, 2001). La mayoría de algoritmos de simplificación operan aplicando una primitiva de mortandad, tal como la contracción de bordes (Hoppe et al, 1993), o levantamiento de vértices (Schroeder, 1992). Una aproximación más general es la aplicación operativa de operaciones, tales como la contracción de bordes sin una búsqueda de optimización global (Hoppe, 1993). Estos métodos se enfocan en la adaptación de la conectividad de la malla. Un énfasis similar en dirección al remuestreo de la superficie puede ser visto en métodos que construyen una descomposición global de la superficie en parches, los cuales son poligonizados para producir una malla final (Cohen-Steiner, 2004).

### 1.1.2 Remallado semi-regular.

El objetivo de los trabajos en esta área es reducir la complejidad de la malla, mientras se mantiene la fidelidad geométrica; las medidas de calidad tal como el grado de los vértices y la regularidad de la malla son generalmente ignoradas. Para un patrón de métodos de análisis de malla multi-resolución, el máximo interés está, en cambio, en que la malla tenga la mejor regularidad posible. Así la estructura de la malla regular es importante, en parte, porque esta puede ser derivada por operaciones de subdivisión de mallas recursivas.

Los esquemas de remallado semiregular aproximan este problema a un proceso de dos pasos. Primero, ellos descomponen la superficie en un conjunto de triángulos o parches cuadrilaterales. Segundo, ellos remuestrean cada parche por subdivisión recursiva. Eck et al (1995), usan la descomposición de Voronoi para crear un conjunto de parches de base triangular. De forma similar, los sistemas MAPS (Lee et al, 1998) construyen un dominio de base triangular por

simplificación. Ambas son diseñadas para usarlas como la etapa inicial en análisis de subdivisión de superficies. Más recientemente, esta aproximación fundamental ha sido extendida por construcción de mallas normales [Friedler], las cuales se enfocan primariamente en la eficiencia codificada de la jerarquía multi-resolución y en la parametrización suave global (Khodakovsky et al, 2003), y producen un alto grado de suavidad paramétrica alrededor de los límites de parches triangulares.

En contraste al caso triangular, comparativamente pocos trabajos se han centrado en el problema de construir mallas cuadrilaterales semi-regulares. La aproximación más común ha tomado esta para construir una descomposición no-cuadrilateral, de la cual una cuadrilaterización ha sido derivada. Eck y Hoppe (1996) inician construyendo una base triangular compleja. Ellos resuelven un problema de emparejamiento máximo sobre el grafo dual de este complejo, uniendo todos los triángulos pares en cuadriláteros. Similarmente, Boier-Martin et al (2004) producen un agrupamiento arbitrario de la superficie en conjuntos de caras conectadas, en las cuales los límites deben ser polígonos de algún tipo y entonces cuadrilaterizan estos polígonos.

## 1.2 Análisis de superficies

### 1.2.1 Teoría de grafo espectral.

Los valores y vectores propios de la matriz laplaciana discreta proveen una formulación natural del espectro de un grafo, y consecuentemente de una malla. El estudio de este espacio propio (conocido como la teoría de grafo espectral) es una rama de las matemáticas que produce resultados fascinantes (Dong et al, 2005). Como la descomposición espectral de una malla expone una gran distribución de esta estructura, esto ha sido satisfactoriamente aplicado en muchas formas. Esto define un dominio de frecuencia natural sobre

la malla, y provee un atractivo formalismo para suavizado de superficies y procesamiento de señales en mallas (Weber et al, 2002). La retención y cuantización de solo las bandas de frecuencia más importantes provee un medio muy efectivo para la comprensión de la geometría de la superficie (Hoppe, 1996): el vector propio correspondiente al primer valor propio diferente de cero (el vector Fiedler) que ha sido usado con gran éxito para la bisección de grafos (Hendrickson y Leland, 1995). Similarmente, este puede ser usado para proveer un ordenamiento de alta localidad para datos de malla. El vector Fiedler, junto con el vector propio subsecuente, puede ser usado automáticamente para grafos embebidos en el plano en una manera estética satisfactoria (Khodakovsky et al, 2003) y (Friedel et al, 2004).

### 1.2.2 Teoría de Morse.

Elementos de la teoría de Morse datan desde el siglo XIX, pero esta fue desarrollada completamente, después; primero, para funciones continuas en superficies suaves (Milnor, 1963) y (Morse, 1925) y más recientemente para mallas (Edelsbrunner et al, 2003). En computación gráfica, la teoría de Morse relaciona estructuras de datos topológicas y ha sido aplicada en isosuperficies, mallas de superficies y búsqueda en bases de datos (Hilaga et al, 2001). En este artículo, se usa el complejo de Morse-Smale como una cuadrilaterización inicial de las superficie enmallada, usando, como una función Morse, uno de los vectores propios Laplacianos, siguiendo el esquema de Bremer (2004) y Dong et al (2005).

## 2. ANÁLISIS ESPECTRAL DE MALLAS Y TEORÍA DE MORSE

De manera general, el análisis espectral trata de inferir características topológicas del objeto a través de funciones matemáticas. Este análisis espectral arroja un espectro, lo que viene a ser un conjunto de valores y vectores propios de una matriz que

ha sido inferida de la malla triangular. El análisis espectral se apoya en la teoría de Morse. Esta teoría escoge unos puntos representativos de los vértices de la malla triangular, que son los puntos críticos de Morse, los cuales serán posteriormente los vértices de los cuadriláteros.

La aplicación de la teoría de Morse para mallas triangulares implica resolver una forma discreta de la ecuación del laplaciano, para encontrar una función Morse que describa la topología representada en la malla triangular. En este sentido, pueden existir puntos críticos adicionales a la característica de la superficie, que produzcan un dominio base que represente adecuadamente la geometría tanto de la misma topología como de la malla original, y también puede agruparse la malla en parches mejorados. En este trabajo se aplica la teoría de Morse a mallas triangulares de una manera más robusta, teniendo en cuenta los puntos de silla y la preservación de bordes, encontrando una función Morse que sea apropiada a un número determinado de puntos críticos.

Esta teoría se basa en el laplaciano para encontrar las funciones armónicas de una función dada. La teoría de Morse relaciona la topología de una superficie  $S$  con su estructura diferencial especificada por los puntos críticos de una función de Morse  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  (Ni et al, 2004) y está relacionada con el análisis espectral de mallas.

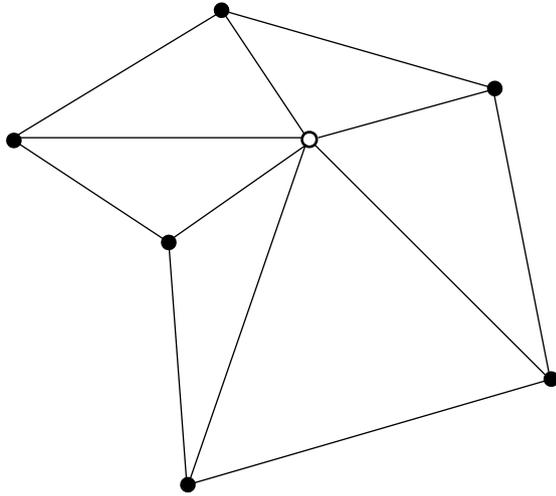
### 2.1 Análisis espectral de mallas

El análisis espectral se realiza calculando inicialmente el laplaciano. El operador laplaciano discreto en funciones lineales de pedazos de superficie sobre superficies trianguladas está dado por:

$$\Delta f_i = \sum_{j \in N_i} W_{ij} (f_j - f_i) \quad (1)$$

Donde  $N_i$  es el conjunto de vértices adyacentes al vértice  $i$  y  $W_{ij}$ , es un peso escalar asignado a la arista dirigida  $(i,j)$ . Este cálculo se puede observar en la figura 1, en la cual los puntos de los vértices,

indican los vértices vecinos sobre el que se hace la sumatoria sobre la que se calcula el laplaciano discreto.



Fuente: la autora

**Figura 1.** Cálculo del Laplaciano discreto sobre un vértice

Para cada grafo libre de cualquier geometría embebida, es habitual usar la definición de pesos combinatorios  $w_{ij} = 1/\text{deg}(i)$ . Sin embargo, para superficies múltiples la opción apropiada, son los pesos armónicos discretos sugeridos por Dong et al (2005):

$$w_{ij} = -\frac{1}{2}(\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) \quad (2)$$

donde  $\alpha_{ij}$  y  $\beta_{ij}$  son los ángulos opuestos al borde  $(i,j)$ .

Representando la función  $f$  por el vector columna de sus valores hacia todos los vértices  $f = [f_1 f_2 \dots f_n]^T$ , podemos reformular el laplaciano como una matriz:

$$\Delta f = -L f \quad (3)$$

donde la matriz laplaciana  $L$  tiene las siguientes entradas:

$$L_{ij} = \begin{cases} \sum_k W_{ik} & \text{Si } i=j, \\ -w_{ij} & \text{Si } (i,j) \text{ es una arista de } M, \\ 0 & \text{En cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (4)$$

Los valores propios  $\lambda_1 = 0 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  de  $L$  forman el espectro de la malla  $S$ , además de describir el cuadrado de la frecuencia y los correspondientes vectores propios  $e_1, e_2, \dots, e_n$  de  $L$  definen las funciones lineales de pedazos de superficie sobre  $S$  de las más altas frecuencias progresivamente (Weber et al, 2002).

## 2.2 Teoría de Morse

Dada una función real sobre alguna superficie, la teoría de Morse conecta la geometría diferencial de una superficie con su topología algebraica; esta teoría describe la conectividad de la superficie, a partir de la configuración de los puntos donde la función del gradiente decae. Tales puntos son llamados puntos críticos (estos son: mínimos, máximos y puntos de silla). La teoría de Morse ha sido utilizada en gráficos y visualización por computador, para analizar diferentes funciones reales. Un ejemplo son los datos de terrenos, los cuales están definidos por una función de altitud en el plano, en donde la teoría de Morse puede identificar características topológicas, controlar su simplificación y organizarlas en jerarquías de multi-resolución (Bremer et al, 2004).

### 2.2.1 Puntos críticos.

El procedimiento propuesto en esta etapa estima una cuadrilateración inicial de la malla utilizando el análisis espectral mediante teoría de Morse. Inicialmente, se obtienen los vértices de los cuadriláteros como un conjunto de puntos críticos de una función Morse. Sea  $c \in S \subset \mathbb{R}^3$  un punto en una superficie  $S$ , en un vecindario continuo parametrizado por  $(u,v)$  (Dong, et al, 2005):

- Un punto  $c \in M$  es crítico si  $f_u(c) = f_v(c) = 0$  con valor crítico  $f(c)$ , de otra manera es regular.

- El punto crítico  $c$  es degenerado si  $f_{uu}(c)f_{vv}(c) - 2f_{uv}(c) = 0$ , de otra manera es Morse.

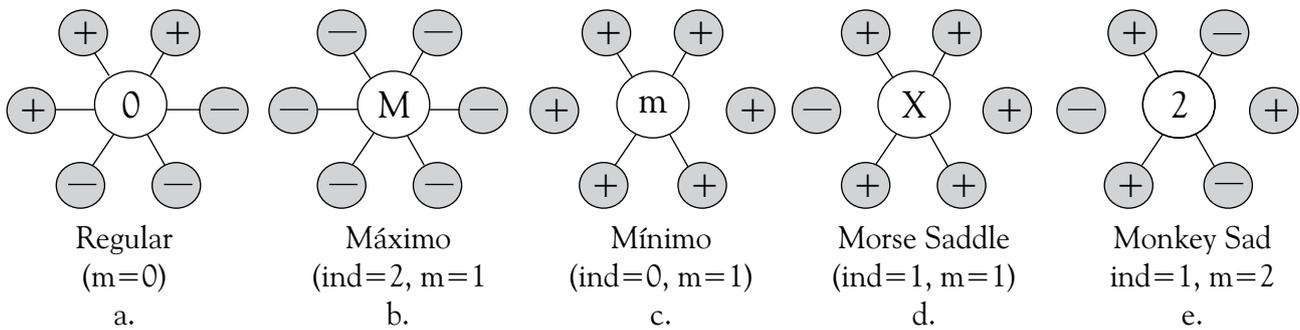
La función  $f$  es llamada función de Morse si todos su puntos críticos son no degenerados.

Siendo  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  dos valores propios de la hessiana de una función  $f$ , con sus correspondientes vectores propios, el índice de un punto crítico de Morse es el número de valores propios negativos de su hessiana, por tanto éste puede clasificarse en (Edelsbrunner et al, 2003):

- Mínimo (índice 0,  $f$  incrementa en toda las direcciones).

- Punto de silla (índice 1,  $f$  cambia en decrementos e incrementos cuatro veces alrededor de un punto).
- Máximo (índice 2,  $f$  decrementa en todas las direcciones).

En la figura 2, se observa la configuración de los puntos críticos. La parte a indica un punto regular. Para la parte b, se observa cómo se halla un máximo cuando todos en el vecindario son mínimos. En la parte c, se observa cómo es un mínimo, cuando todos los de alrededor son máximos. Las partes d y e indican puntos de silla.



Fuente: Edelsbrunner, Harer y Zomorodian, 2003

Figura 2. Ejemplos de vértices críticos y regulares

### 2.2.2 Complejo de Morse-Smale

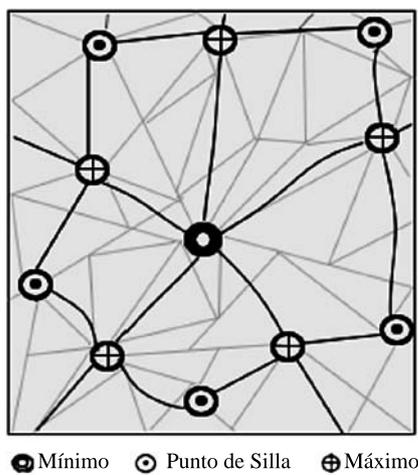
El complejo de Morse-Smale es obtenido mediante la conexión de un conjunto de puntos críticos que pertenecen a un campo propio de la matriz laplaciana. La definición de un campo propio se obtiene seleccionando el conjunto de vectores asociado a un valor solución del sistema de ecuaciones. Como la función de Morse representa una función sobre la malla, cada valor propio describe el cuadrado de la frecuencia de dicha función. Así, la selección de cada valor propio indica directamente la cantidad de puntos críticos que posee la función. Para valores de frecuencia altos, mayor número de puntos críticos se obtendrán. Esto permite representar cada objeto con un número

mero variable de parches de superficie. El campo propio asigna valores de función para cada vértice de la malla, lo que permite determinar si un vértice de la malla es un punto crítico de la función de Morse. Adicionalmente, de acuerdo con un conjunto de valores obtenidos como el vecindario del primer anillo de cada vértice, es posible clasificar los puntos críticos como máximos, mínimos o puntos de silla. La identificación y clasificación de cada punto crítico permite construir el complejo Morse-Smale.

Una vez obtenidos y clasificados los puntos críticos, estos se deben conectar para formar la base cuadrilateral de la malla. La conexión de los puntos críticos se inicia seleccionando un punto silla y construyendo dos líneas de ascenso incli-

nadas y dos líneas de descenso declinadas. Las líneas inclinadas se forman como un conjunto de vértices que terminan en un punto crítico máximo. Inversamente, una línea de descenso se forma por el camino de vértices que terminan en un punto crítico mínimo. Sin embargo, existen casos en los que no es posible determinar el conjunto de dos líneas ascendentes y dos descendentes. Se debe tener en cuenta que dos caminos pueden ser unidos sólo si ambos ascienden o ambos descienden.

Después de calcular todos los caminos, se divide  $S$  en regiones cuadrilaterales que forman las células del complejo de Morse-Smale. Específicamente, se desarrolla cada cuadrilátero de un triángulo incidente a un punto de silla sin cruzar nunca un camino (ver figura 3):



Fuente: la autora

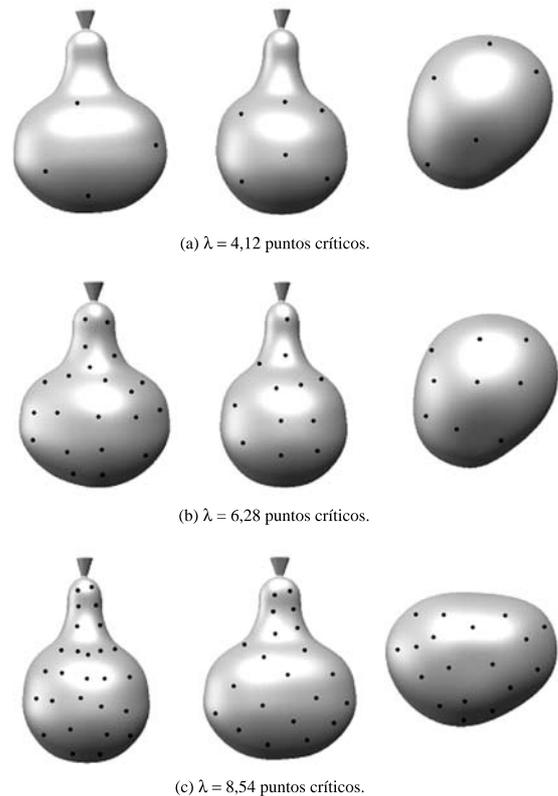
**Figura 3.** Cuadriláteros formados por el complejo de Morse-Smale

### 3. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

Las pruebas visuales para cada una de las fases de este trabajo fueron obtenidos utilizando un procesador AMD Sempron a 3,0GHz con 512Mb

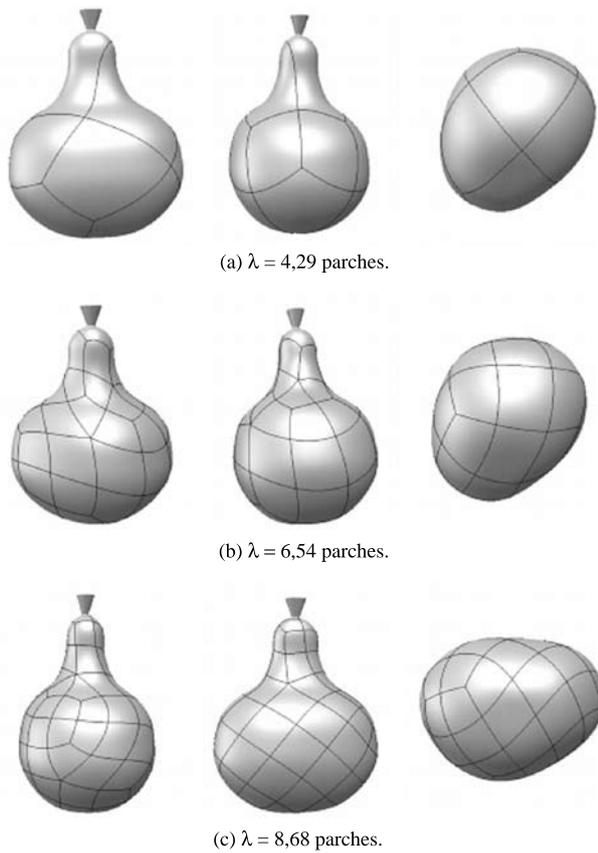
de Memoria. El lenguaje de programación utilizado fue C++ con motor gráfico OpenGL y como plataforma de desarrollo Builder 5.0.

La generación de la malla cuadrilateral y la representación computacional de los modelos fueron probados con dos imágenes de rango de objetos reales: la primera es la “pera”, utilizada por su geometría suave; la segunda es el objeto “moai” el cual tiene topología arbitraria muy irregular. En las figuras 4 y 6 se pueden observar los puntos críticos resultantes de diferentes configuraciones de armónicos para ambos objetos. En las figuras 5 y 7, la malla cuadrangular se ajustó adecuadamente a la geometría de los objetos, independiente de su topología.



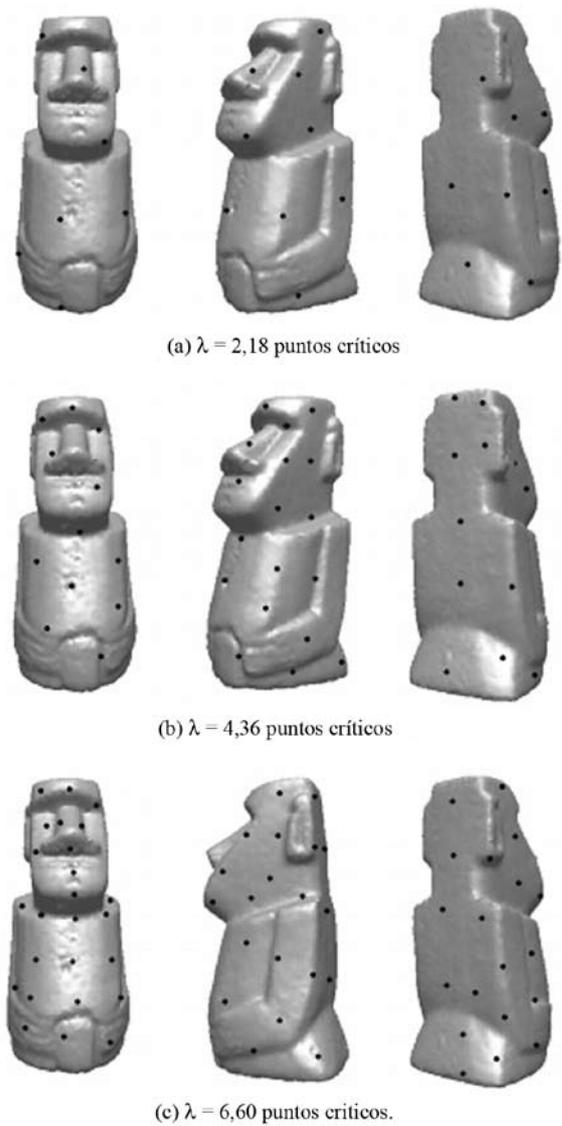
Fuente: la autora

**Figura 4.** Puntos críticos arrojados por la teoría de Morse para el objeto pera



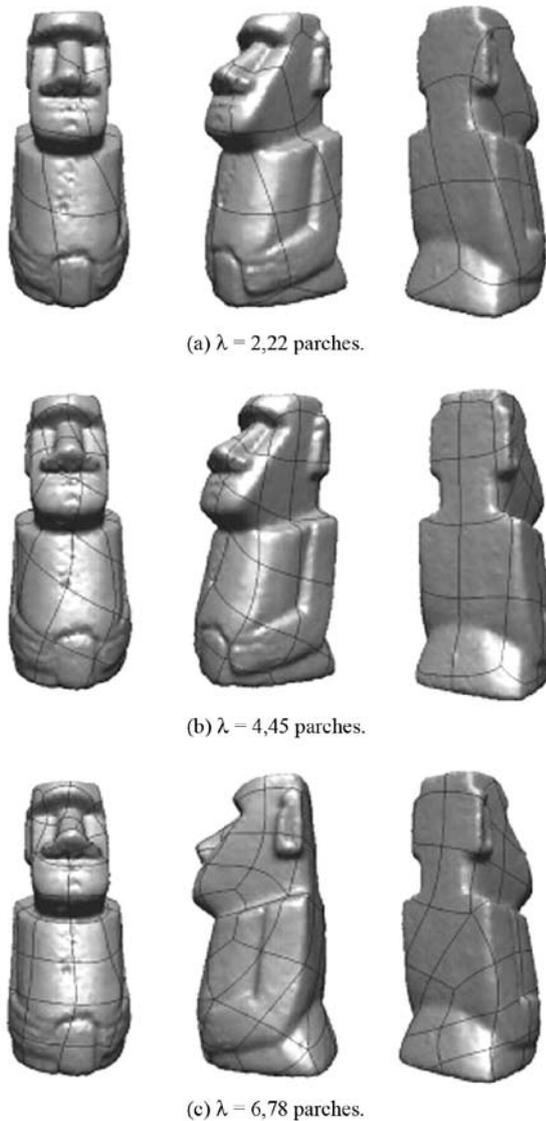
Fuente: la autora

**Figura 5.** Cuadrilaterización obtenida mediante el complejo MS para el objeto pera



Fuente: la autora

**Figura 6.** Puntos críticos arrojados por la Teoría de Morse para el Objeto Moai



Fuente: la autora

**Figura 7.** Cuadrilaterización obtenida mediante el complejo MS para el objeto moai

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo, se han explorado y desarrollado el análisis espectral y la teoría de Morse en mallas triangulares para generar mallas cuadrilaterales. La teoría discreta de Morse garantiza que sin importar la complejidad topológica de la superficie que representa la malla triangular, se obtenga una descripción cuadrilateral completa, es decir, que es posible dividir completamente la superficie de los objetos mediante cuadriláteros. La obtención de un número determinado de puntos críticos, depende exclusivamente del armónico seleccionado. Se usa la teoría de Morse para analizar la estructura de los campos propios laplacianos de la superficie y así producir cuadriláteros que se generan directamente sobre la forma intrínseca de la superficie. Además, el uso del complejo de Morse-Smale es robusto topológicamente y garantiza que la base compleja sea siempre cuadrilateral, evitando así las ambigüedades entre cuadriláteros.

## REFERENCIAS

- BOIER-MARTIN, I., RUSHMEIER, H., y JIN, J., 2004. "Parameterization of triangle meshes over quadrilateral domains". In Proc. Eurographics Symposium on Geometry Processing, 197-207.
- BREMER P., EDELSBRUNNER H., HAMANN B., y PASCUCCHI V., 2004. "A topological hierarchy for functions on triangulated surfaces". TVCG 10, 4, 385-396.
- COHEN-STEINER, D., ALLIEZ, P., y DESBRUN, M., 2004. "Variational shape approximation". TOG 23, 3, 905-914. (Proc. SIGGRAPH).
- DONG, S., BREMER, P., GARLAND, M., PASCUCCHI, V. y HART, J., 2005. "Quadrangulating a mesh using laplacian eigenvectors". Technical Report UIUCDCS-R-2005-2583.
- ECK, M., y HOPPE, H., 1996. "Automatic reconstruction of B-spline surfaces of arbitrary topological type". In Proc. SIGGRAPH, 325-334.
- ECK, M., DEROSE, T., DUCHAMP, T., HOPPE, H., LOUNSBERRY, M. y STUETZLE, W., 1995. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. In Proc. SIGGRAPH, 173-182.
- EDELSBRUNNER, H., HARER, J. y ZOMORODIAN, A., 2003. "Hierarchical Morse-Smale complexes for piecewise linear 2-manifolds". Discrete Comput. Geom, 30, 87-107.
- FRIEDEL, I., SCHRÖDER, P. y KHODAKOVSKY, A., 2004. "Variational normal meshes". TOG 23, 4, 1061-1073. (Proc. SIGGRAPH).
- GARLAND M., WILLMOTT A. y HECKBERT P., 2001. "Hierarchical face clustering on polygonal surfaces". In Proc. Symp. Interactive 3D Graphics, 49-58,245
- HENDRICKSON, B. y LELAND, R., 1995. "An improved spectral graph partitioning algorithm for mapping parallel computations." SIAM J. Sci. Comp. 16, 2, 452-469.
- HILAGA, M., SHINAGAWA, Y., KOHMURA, T. y KUNII, T., 2001. "Topology matching for fully automatic similarity estimation of 3d shapes". In Proc. SIGGRAPH, 203-212.
- HOPPE, H., DEROSE, T., DUCHAMP, T., MCDONALD, J. y STUETZLE, W., 1993. "Mesh optimization". In Proc. SIGGRAPH, 19-26.
- HOPPE, H., 1996. "Progressive meshes". In Proc. SIGGRAPH, 99-108..
- KHODAKOVSKY, A., LITKE, N., y SCHRÖDER, P., 2003. "Globally smooth parameterizations with low distortion". TOG 22, 3, 350-357. Proc. SIGGRAPH.
- LEE, A., SWELDENS, W., SCHRÖDER, P., COWSAR, L. y DOBKIN, D., 1998. "MAPS: Multiresolution adaptive parameterization of surfaces". In Proc. SIGGRAPH, 95-104.
- MILNOR, J., 1963. "Morse Theory". Princeton University Press.
- MORSE, M., 1925. "Relations between the critical points of a real functions of n independent variables". Trans. AMS 27, 345-396.
- NI, X., GARLAND, M., y HART, J., 2004. Fair morse functions for extracting the topological structure of a surface mesh. TOG 23,3,3,613-622 (Proc. SIGGRAPH).
- SCHROEDER, I., W. ZARGE, J. and LORENSEN, W. E., 1992 Decimation of triangle meshes. Computer Graphics 26, 2 (July), 65-70. (Proc. SIGGRAPH),
- WEBER, G., SCHEUERMANN, G., HAGEN, H. y HAMANN, B., 2002. "Exploring scalar fields using critical isovalues". In Proc. Visualization, 171-178.